

К 200-летию Харьковского университета
Серия монографий и учебных пособий

В.В.Ульянов

СБОРНИК ОБЗОРОВ И СТАТЕЙ ПО КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ

Часть четвертая



Харьков 2012

К 65-летию кафедры теоретической физики
имени академика И.М.Лифшица

В.В.Ульянов

**СБОРНИК ОБЗОРОВ И
СТАТЕЙ ПО КВАНТОВОЙ
ТЕОРИИ**

(с соавторами и без)

I V

**СОЛИТОННЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ
АНГАРМОНИЧЕСКИЕ ОСЦИЛЛЯТОРЫ
ОСЦИЛЛЯЦИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ
ТУННЕЛЬНОЕ РАСЩЕПЛЕНИЕ ЭНЕРГИИ
КВАЗИТОЧНОРЕШАЕМЫЕ МОДЕЛИ**

Харьков 2012

УДК 530.145

У 51

У 51 **Ульянов В.В.** Сборник обзоров и статей по квантовой теории (с соавторами и без). Часть IV / В.В.Ульянов. Электронное издание. - Х.: ХНУ имени В.Н.Каразина, 2012. - 66 с.

Сборник содержит несколько обзоров и статей, в которых затрагиваются различные вопросы квантовой теории.

В четвертую часть входят статьи, посвященные солитонным потенциалам, ангармоническим осцилляторам, осцилляционным явлениям, туннельному расщеплению энергии и квазиточнорешаемым моделям.

Сборник продолжает серию изданий, приуроченную к 200-летию Харьковского университета и 65-летию кафедры теоретической физики имени академика И.М.Лифшица.

Посвящается Льву Элеazarовичу Паргаманику – профессору кафедры теоретической физики, известному физику-теоретику, воспитавшему многих выдающихся специалистов.

Предназначен для научных работников, преподавателей, студентов и аспирантов физических специальностей вузов.

Издается по решению кафедры теоретической физики имени академика И.М.Лифшица от 17 мая 2011 года (протокол № 11)

УДК 530.145

ПРЕДИСЛОВИЕ

В сборник включены некоторые обзоры и обзорные статьи, а также небольшие статьи, представляющие для автора особый интерес.

Большая часть этих публикаций написана совместно с моими коллегами по кафедре теоретической физики.

Четвертая часть содержит статьи, посвященные солитонным потенциалам, ангармоническим осцилляторам, осцилляционным явлениям, туннельному расщеплению энергии и квазиточнорешаемым моделям.

Сборник посвящается Льву Элеазаровичу Паргаманику – профессору кафедры теоретической физики, известному физику-теоретику, воспитавшему многих выдающихся специалистов.

Предназначен для научных работников, преподавателей, студентов и аспирантов физических специальностей вузов.

На последней странице помещены изображения обложек физических журналов, в которых публиковались обзоры и статьи из данного сборника.

Благодарю Александра Михайловича Ермолаева за внимательное отношение к работам автора, за постоянную помощь советами и редкой литературой.

УКРАЇНСЬКИЙ
ФІЗИЧНИЙ
ЖУРНАЛ

3

1998

Том 43

Volume

UKRAINIAN
JOURNAL
OF PHYSICS

ТОЧНО РОЗВ'ЯЗУВАНІ МОДЕЛІ ПОТЕНЦІАЛІВ НАДПРОЗОРОГО ТИПУ В КВАНТОВІЙ МЕХАНІЦІ

Ю. В. ВАСИЛЕВСЬКА, В. В. УЛЬЯНОВ

УДК 530.145

© 1998 р.

Харківський державний університет
(310077 Харків 77, площа Свободи, 4)

Розглядаються особливості точних розв'язків рівняння Шредінгера з простими явними аналітичними виразами для потенціальних полів, рівнів енергії та хвильових функцій стаціонарних станів, які з'явилися завдяки методам, розробленим у теорії солітонів. Знайдено характерні форми три- та чотирирівневих потенціалів, а також фазові доданки, які визначають несиметричну поведінку потенціальних моделей. Одержано явні формули для відповідних хвильових функцій зв'язаних стаціонарних станів та обговорюються узагальнення на багаторівневі випадки.

Вступ

Взаємозв'язок одновимірного стаціонарного рівняння Шредінгера та нелінійного еволюційного рівняння Кортевега — де Вріза у теорії солітонів [1 — 3] приводить до появи такої форми запису потенціальних полів, у якій є прості явні формули для рівнів енергії та хвильових функцій стаціонарних станів у квантовій механіці.

До розробки методу оберненої задачі розсіяння в теорії солітонів простих точних розв'язків стаціонарного рівняння Шредінгера з явними виразами для рівнів енергії та хвильових функцій було відомо дуже мало. Це — гармонічний осцилятор, нескінченна прямокутна потенціальна яма, кулонівський потенціал, дельта-яма, потенціали Пешля — Теллера, Еккарта, Морса [4 — 8].

Новий прорив у питанні одержання точних розв'язків рівняння Шредінгера був зв'язаний з розвитком теорії спінових систем та розробкою методу ефективних потенціалів для таких систем [9], що дозволило відкрити нові класи точних розв'язків рівняння Шредінгера з простими явними формулами для рівнів енергії та хвильових функцій стаціонарних станів [10, 11]. Багато у чому ці так звані квазіточно розв'язувані моделі спінової природи є аналогічними солітоноподібним моделям, але

на відміну від останніх їх потенціали нелокальні та рівні енергії в них суттєво змінюються в залежності від кількох параметрів.

Слід відзначити суттєво зростаючий інтерес до проблеми точно розв'язуваних задач — розділу квантової теорії, що активно розвивається. Серед сучасних напрямків пошуку нових точних розв'язків рівняння Шредінгера, крім згадуваних солітонного та спінового, можна назвати [9] різноманітні варіанти методу факторизації, математичні трансформації диференціальних рівнянь, методи суперсиметрії, перетворення Дарбу, теоретико-групові підходи, різні узагальнення існуючих точно розв'язуваних задач тощо. Щоправда, при цьому виникають вже більш складні конструкції як для потенціалів, так і для енергетичного спектра та хвильових функцій.

1. Загальні особливості солітоноподібних потенціалів

Слід підкреслити, що відомості про солітоноподібні поля, які можна одержати з теорії солітонів, далеко не вичерпують їх особливостей. Більш детальні дослідження дозволяють виявити у них багато цікавих властивостей.

Якщо задати N довільно обраних параметрів $0 < k_{N-1} < k_{N-2} < \dots < k_0$, то можна побудувати сім'ю просторово локалізованих потенціалів за допомогою компактних формул

$$u(x) = -2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln [\det (F_{mn})],$$

$$F_{mn} = \delta_{mn} + 2 \frac{\sqrt{k_m k_n}}{k_m + k_n} \exp (\varphi_m + \varphi_n),$$

$$\varphi_n = \gamma_n + \Delta_n, \quad \gamma_n = k_n x - 4k_n^3 t + \delta_n,$$

$$m, n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (1)$$

де δ_{mn} — символ Кронекера. Позначення є загальноприйнятими у квантовій механіці для зв'язаних стаціонарних станів, а безрозмірні величини — типовими для теорії солітонів.

Величина t у потенціалах (1), що має фізичний зміст часу для солітонів, тут є постійним допоміжним параметром, який будемо називати "квазічасом", а "фазові" величини Δ_n залежать від енергетичних параметрів k_m :

$$\Delta_n = \frac{1}{2} \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq n}}^{N-1} \ln \left| \frac{k_n + k_m}{k_n - k_m} \right|, \quad N > 1; \quad \Delta_n = 0, \quad N = 1.$$

Особливі фазові доданки δ_n зумовлюють властивості симетрії моделей (1).

Для потенціальних енергій (1) стаціонарне рівняння Шредінгера у координатному зображенні

$$\frac{d^2 \psi_n}{dx^2} + [E - u(x)] \psi_n = 0$$

має зв'язані стани з рівнями енергії $E_n = -k_n^2$ та відповідними хвильовими функціями ψ_n , які безпосередньо можна одержати з неоднорідної системи N лінійних рівнянь

$$\sum_{m=0}^{N-1} F_{nm} \psi_m = \sqrt{2k_n} \exp(\varphi_n). \quad (2)$$

Потенціали (1) мають від'ємний знак, а їх деформації при зміні квазічасу t відбуваються зі збереженням площини.

Якщо $t \rightarrow \pm \infty$ потенціал (1) складається з N відокремлених неоднакових ям Еккарта, що у випадку $t = 0$ об'єднуються у складену яму, яка набуває різних як симетричних (якщо всі $\delta_n = 0$), так і несиметричних форм. Можна показати, що в загальному випадку кількість незалежних параметрів, які визначають форму N -рівневих потенціалів (1), дорівнює $2(N-1)$. Таким чином, на відміну від інших випадків з точними розв'язками в квантовій механіці, коли задається потенціал і розв'язується рівняння Шредінгера [4, 5] (задача про власні значення), внаслідок чого отримуються рівні енергії та відповідні хвильові функції, у моделях солітонного походження довільно вибираються рівні енергії і для них будуються досить прості потенціали з точними розв'язками. Ще одною важливою особливістю потенціалів солітонної природи є те, що для кожного набору рівнів енергії знаходиться не

один фіксований профіль потенціалу, а безмежна багатопараметрична кількість потенціальних моделей.

В області неперервного спектра енергії $E > 0$ солітоноподібні моделі (1) мають властивості надпрозорості: згідно із стаціонарною теорією розсіяння квантові частинки приходять крізь потенціальну яму (1) без відбиття. Так, хвильові функції для випадку падіння на яму з рухом від $-\infty$ можна виразити через характеристики зв'язаних станів:

$$\psi_k = \left[1 - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\sqrt{2k_n}}{k_n + ik} \exp(\varphi_n) \psi_n \right] \exp(ikx), \quad k = \sqrt{E}$$

(аналогічно для станів з падінням від $+\infty$). Проте нестаціонарна теорія передбачає локальні особливості руху хвильових пакетів та інтегральні ефекти типу часового зсуву порівняно з вільним рухом [12].

2. Конкретні приклади потенціальних моделей

У випадку $N = 1$ форма моделі (1) фіксована — це однорівнева яма Еккарта, для якої завжди можна вибрати початок відліку координати x так, щоб $u(x) = -2k_0^2 / \text{ch}^2 k_0 x$. Тоді відповідна хвильова функція основного стану згідно з виразом (2)

$$\psi_0(x) = \sqrt{\frac{k_0}{2}} \frac{1}{\text{ch} k_0 x}.$$

У випадку $N = 2$ моделі (1) вже мають досить різні форми (з одним або двома мінімумами, в тому числі мінімум 4-го порядку), які визначаються двома параметрами: квазічасом t та відношенням енергетичних величин k_0/k_1 (фазові доданки δ_0 та δ_1 можна зробити рівними нулю вибором початку відліку x і t).

Формулу (1) для потенціальної енергії можна перетворити до вигляду

$$u(x) = -8 \exp(2\Delta) (k_0^2 \text{ch}^2 \gamma_1 + k_1^2 \text{sh}^2 \gamma_0) / d_2^2,$$

$$d_2 = \text{ch}(\gamma_1 + \gamma_0) + \exp(2\Delta) \text{ch}(\gamma_1 - \gamma_0),$$

де

$$\Delta \equiv \Delta_0 = \Delta_1 = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{k_0 + k_1}{k_0 - k_1} \right).$$

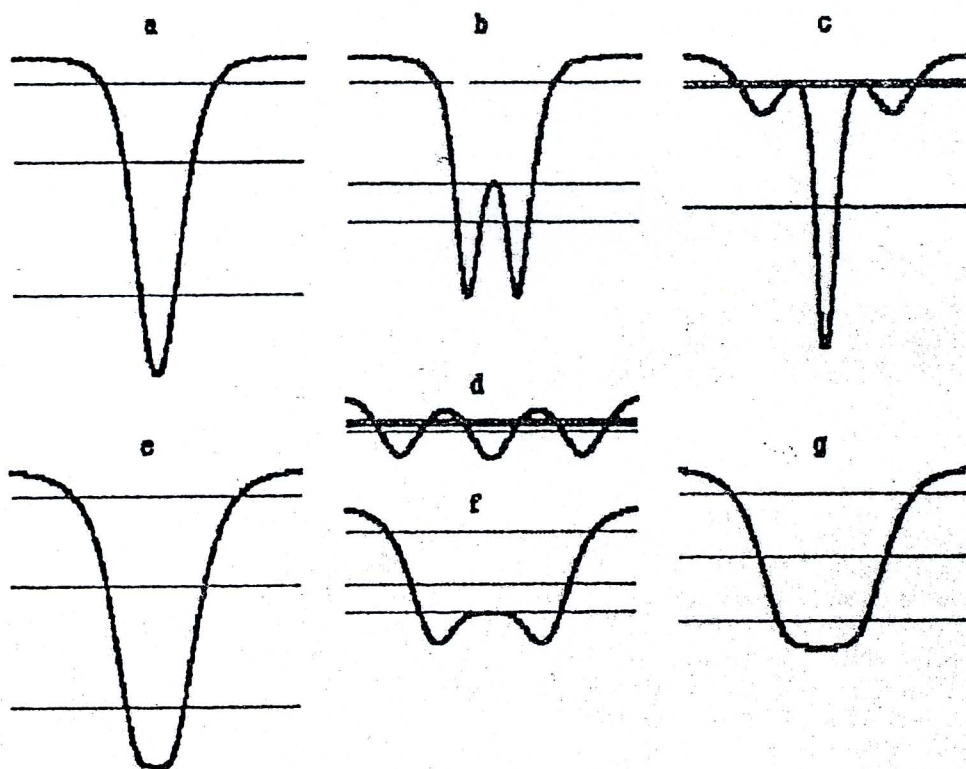


Рис. 1. Типові форми трирівневих симетричних потенціалів

Відповідно розв'язок системи (2) для хвильових функцій основного та першого збудженого станів можна записати у вигляді

$$\psi_0(x) = \sqrt{2k_0} \exp(\Delta) \frac{\text{ch } \gamma_1}{d_2},$$

$$\psi_1(x) = -\sqrt{2k_1} \exp(\Delta) \frac{\text{sh } \gamma_0}{d_2}.$$

Якщо одно- та дворівневі форми потенціалів (1) відомі відповідними солітонними профілями, то цього не можна сказати вже про трирівневі моделі, в яких є чотири незалежні параметри: k_1/k_2 , k_0/k_2 , t і один з фазових доданків, наприклад δ_2 (два інші впливають лише на початок відліку x і t , так що їх можна вважати рівними нулю). Якщо при цьому $t = 0$ і $\delta_2 = 0$, то маємо симетричні форми потенціалів (1), тобто $u(-x) = u(x)$, які при $x = 0$ дорівнюють

$$u(0) = -2(k_0^2 - k_1^2 + k_2^2).$$

Дослідження свідчить, що за умови

$$k_0^4 - 4(k_1^2 - k_2^2)k_0^2 + (k_1^2 - k_2^2)(3k_1^2 - k_2^2) = 0$$

виникають екстремуми 4-го порядку. На рис. 1 наведено деякі типові симетричні профілі, що відповідають різним співвідношенням між енергетичними величинами k_m . На площині $(k_1^2/k_2^2, k_0^2/k_2^2)$ це відповідає вітці гіперболи, частина якої належить до четвертих мінімумів (профіль *e* на рис. 1), а інша частина — до четвертих максимумів (профіль *f* на рис. 1). На стику мінімумів та максимумів є мінімум 6-го порядку (профіль *g* на рис. 1) при значеннях $k_1/k_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ та $k_0/k_2 = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$. При $t \neq 0$ та (або) $\delta_2 \neq 0$ одержуємо несиметричні профілі.

Для вивчення особливостей потенціалів солітонного типу нами також проведено комп'ютерне моделювання з дослідженням впливу різних параметрів на форму моделей (1). Аналітичні результати при цьому перевіряються та суттєво доповнюються в умовах комп'ютерної візуалізації. Наприклад, на розробленому оригінальному стенді є можливість плавної зміни основних параметрів —

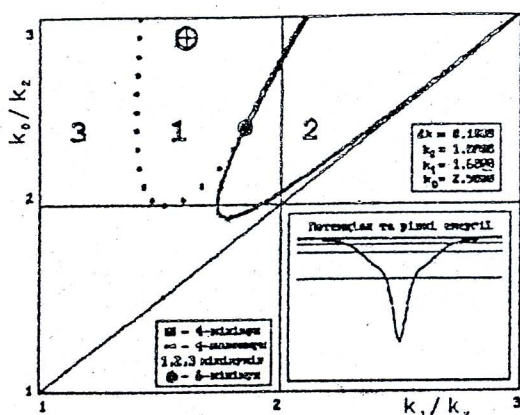


Рис. 2. Приклад комп'ютерного дослідження багатопараметричних моделей

квазічасу t , фазових доданків δ_n та енергетичних величин k_m , для чого створено спеціальні шкали з повзунками-показниками. Наведемо ще приклад комп'ютерного дослідження впливу енергетичних параметрів. Так, на рис. 2 (з екрана дисплея) показана схема сканування області параметрів k_1/k_2 та k_0/k_2 при умові $t = 0$, $\delta_2 = 0$, на якій позначено області різних екстремумів симетричних потенціальних моделей. У правому нижньому куті при цьому з'являється поточний профіль потенціалу з розташуванням рівнів енергії. Над ним, у малому вікні, висвічуються конкретні значення параметрів k_2, k_1, k_0 , а також крок dk зміни рухомого показника (хрестик у колі). У лівому малому віконці описані характерні лінії та області: жирна крива вказує мінімуми 4-го порядку, тонка — максимуми 4-го порядку, а на їх стику маємо мінімум 6-го порядку. Великі цифри позначають частини площини, де розташовані профілі з одним (1), двома (2) та трьома (3) мінімумами.

Аналогічно скануються профілі моделей з $N > 3$.

Щодо хвильових функцій, то у випадку $N = 3$ з системи рівнянь (2) одержуємо для них такі вирази в основному та двох збуджених станах:

$$\psi_2(x) = \sqrt{2k_2} \exp(\Delta_2) [\operatorname{ch}(\gamma_0 + \gamma_1) - \exp(\Delta_1 + \Delta_0 - \Delta_2) \operatorname{ch}(\gamma_0 - \gamma_1)] / d_3,$$

$$\psi_1(x) = -\sqrt{2k_1} \exp(\Delta_1) [\operatorname{sh}(\gamma_0 + \gamma_2) + \exp(\Delta_2 + \Delta_0 - \Delta_1) \operatorname{sh}(\gamma_0 - \gamma_2)] / d_3,$$

$$\psi_0(x) = \sqrt{2k_0} \exp(\Delta_0) [\operatorname{ch}(\gamma_1 + \gamma_2) + \exp(\Delta_2 + \Delta_1 - \Delta_0) \operatorname{ch}(\gamma_1 - \gamma_2)] / d_3,$$

де

$$d_3 = \operatorname{ch}(\gamma_2 + \gamma_1 + \gamma_0) + \exp(2\Delta_2) \operatorname{ch}(\gamma_1 + \gamma_0 - \gamma_2) + \exp(2\Delta_1) \operatorname{ch}(\gamma_2 + \gamma_0 - \gamma_1) + \exp(2\Delta_0) \operatorname{ch}(\gamma_2 + \gamma_1 - \gamma_0).$$

Додамо, що результати для $N = 2$ можна одержати граничним переходом $k_2 \rightarrow 0$ з формул для $N = 3$. У випадку $N = 4$, якщо $t = 0$ та всі $\delta_n = 0$, потенціальні енергії (1) при $x = 0$ набувають значень

$$u(0) = -2(k_0^2 - k_1^2 + k_2^2 - k_3^2),$$

а їх екстремумам 4-го порядку у просторі змінних $(k_2^2/k_3^2, k_1^2/k_3^2, k_0^2/k_3^2)$ відповідає однополий гіперboloїд, усередині якого потенціал має максимуми, а зовні — мінімуми. На цій поверхні проходять лінії екстремумів 6-го порядку, перетин яких дає точку мінімуму 8-го порядку, де

$$u(x) = -2(3 + \sqrt{5})k_3^2 + \frac{4}{315}(123 + 55\sqrt{5})k_3^{10}x^8 + O(x^{10})$$

для таких значень енергетичних параметрів:

$$k_2/k_3 = \sqrt{(5 + \sqrt{5})/2}; \quad k_1/k_3 = \sqrt{(7 + 3\sqrt{5})/2};$$

$$k_0/k_3 = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}.$$

Аналогічні властивості мають і багаторівневі моделі з $N > 4$.

Висновки

Таким чином, кількість потенціалів з простими точними розв'язками в квантовій механіці суттєво збагачується локалізованими багатопараметричними моделями різного виду. Досить важливо мати такий комплекс точних розв'язків для методичних ілюстрацій. З'являється наочний спосіб демонстрації структури енергетичного спектра у випадку потенціалів з екстремумами високого порядку, попадання рівнів у критичний діапазон енергій поблизу максимумів потенціалу, а також квантових ефектів типу тунельного розщеплення, формування зонного спектра тощо.

Крім локалізованих солітоноподібних потенціалів з точними розв'язками, існують так звані скінченнозонні періодичні (та майже періодичні) потенціали [1], яких ми не торкаємося у цій роботі.

Говорячи про загальну роль точних розв'язків рівняння Шредінгера, слід перш за все підкреслити, що в квантовій механіці вони є основою головного розділу — теорії стаціонарних станів [4, 5], вивчення фізичних властивостей яких відбувається на конкретних прикладах з точними розв'язками, що використовуються також для ілюстративних вправ [6 — 8]. Окрім того, одним з основних теоретичних засобів є зведення нової задачі до добре відомої, так що точні розв'язки стають основою нових задач. Оскільки в основі теорії збурень лежить уявлення про деякий відомий точний розв'язок, до якого у першому наближенні зводиться дана задача та за допомогою якого будуються подальші уточнення, то саме точні розв'язки є базою наближених методів. Додамо, що прості моделі часто використовуються під час вивчення складних явищ з невідомими закономірностями. Варто зауважити, що перевірка нових теорій теж звичайно здійснюється на основі точно розв'язуваних задач. Вони також корисні як тестові приклади при застосуванні чисельних методів, які відпрацьовуються та перевіряються на відповідних точних розв'язках.

Узагальнюючи, можна сказати, що точні розв'язки рівняння Шредінгера, особливо з простими явними аналітичними виразами для потенціалів, рівнів енергії та хвильових функцій стаціонарних станів, утворюють непорушне цінне надбання квантової теорії.

Постановка питання про точні розв'язки рівняння Шредінгера солітонного походження в літературі з квантової механіки, за винятком [12], мабуть, у цьому аспекті ще не обговорювалась.

Автори вдячні О.Б.Заславському за обговорення результатів роботи.

1. Теория солитонов /В.Е.Захаров, С.В.Манакон, С.П.Новиков, Л.П.Питаевский.— М.: Наука, 1980.
2. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи.— М.: Мир, 1987.
3. Лэм Дж. Введение в теорию солитонов.— М.: Мир, 1983.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика.— М.: Наука, 1989.
5. Давыдов А.С. Квантовая механика.— М.: Наука, 1973.
6. Флюгге З. Задачи по квантовой механике.— М.: Мир, 1974.— Т.1.
7. Ульянов В.В. Задачи по квантовой механике и квантовой статистике.— Харьков: Выща шк., 1980.

8. Галицкий В.М., Карнаков Б.М., Коган В.И. Задачи по квантовой механике.— М.: Наука, 1981.
9. Ulyanov V.V., Zaslavskii O.B.//Phys. Repts.— 1992.— 216, N4.— P.179 — 251.
10. Заславский О.Б., Ульянов В.В.//ЖЭТФ.— 1984.— 87, вып. 5.— С.1724 — 1733.
11. Заславский О.Б., Ульянов В.В.//ТМФ.— 1987.— 71, № 2.— С.260 — 271.
12. Ульянов В.В. Методы квантовой кинетики.— Харьков: Выща шк., 1987.

Одержано 01.04.97,
в остаточному варіанті — 02.09.97

ТОЧНО РЕШАЕМЫЕ МОДЕЛИ ПОТЕНЦИАЛОВ БЕЗОТРАЖАТЕЛЬНОГО ТИПА В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

Ю. В. Василевская, В. В. Ульянов

Резюме

Рассматриваются особенности точных решений уравнения Шредингера с простыми явными аналитическими выражениями для потенциальных полей, уровней энергии и волновых функций стационарных состояний, которые появились благодаря методам, разработанным в теории солитонов. Найдены характерные формы трех- и четырехуровневых потенциалов, а также фазовые добавки, определяющие несимметричное поведение потенциальных моделей. Выведены явные формулы для соответствующих волновых функций связанных стационарных состояний и обсуждается обобщение на многоуровневые случаи.

EXACTLY SOLVABLE MODELS OF POTENTIALS OF THE SOLITON TYPE IN QUANTUM MECHANICS

Yu. V. Vasilevskaya, V. V. Ulyanov

Kharkiv State University
(4, Svobody Sq., Kharkiv 310077, Ukraine)

Summary

Peculiarities of exact solutions of the Schrödinger equation with simple explicit analytic expressions of potential fields, energy levels, and wave functions of stationary states are considered within methods developed in the soliton theory. Characteristic forms of three- and four- level potentials and phase additions defining a nonsymmetric behaviour of potential models are obtained. Explicit formulae for the corresponding wave functions of stationary states are deduced and generalizations to multilevel cases are discussed.

Точные решения уравнения Шредингера в случае солитонообразных моделей потенциальных полей

Ю.В. Василевская, В.В. Ульянов

Харьковский государственный университет,

Украина, 310077, Харьков, пл. Свободы 4.

E-mail: Vladimir.V.Ulyanov@univer.kharkov.ua

Рассматриваются особенности точных решений уравнения Шредингера с простыми явными аналитическими выражениями для потенциальных полей, уровней энергии и волновых функций стационарных состояний, которые появились благодаря методам, разработанным в теории солитонов. Найден характерные формы трех- и четырехуровневых потенциалов, а также фазовые добавки, определяющие несимметричное поведение потенциальных моделей. Выведены явные формулы для соответствующих волновых функций стационарных состояний и обсуждается обобщение на многоуровневые случаи.

Розглядаються особливості точних розв'язків рівняння Шредингера з простими явними аналітичними виразами для потенціальних полів, рівнів енергії та хвильових функцій стаціонарних станів, які з'явилися завдяки методам, розробленим у теорії солітонів. Знайдено характерні форми трьох- та чотирьохрівневих потенціалів, а також фазові додатки, які визначають несиметричну поведінку потенціальних моделей. Виведено явні формули для відповідних хвильових функцій стаціонарних станів та обговорюються узагальнення на багаторівневі випадки.

УДК 530.145

1. Взаимосвязь одномерного стационарного уравнения Шредингера и нелинейного эволюционного уравнения Кортевега - де Фриза в теории солитонов [1] приводит к появлению потенциальных полей, для которых имеются простые явные формулы для уровней энергии и волновых функций стационарных состояний в квантовой механике.

До разработки в теории солитонов метода обратной задачи рассеяния было известно очень мало простых точных решений стационарного уравнения Шредингера с явными выражениями для уровней энергии и волновых функций. К их числу относятся гармонический осциллятор, бесконечная прямоугольная потенциальная яма, кулоновский потенциал, дельта-потенциал, потенциалы Еккарта, Морса [2] и различные их модификации и комбинации, а также некоторые другие решения более сложного вида или с неявными выражениями для уровней энергии и волновых функций.

Новый прорыв в проблеме точных решений уравнения Шредингера был связан с развитием теории спиновых систем и разработкой метода эффективных потенциалов для таких систем [3], что позволило обнаружить новые классы точных решений уравнения Шредингера с простыми явными формулами для уровней энергии и волновых функций стационарных состояний. Во многих отношениях эти так называемые квазиточнорешаемые модели спиновой природы аналогичны солитоноподобным моделям [4], но в отличие от последних их потенциалы не локализованы пространственно и уровни энергии в них существенно изменяются в зависимости от нескольких параметров.

Необходимо отметить значительно возросший интерес к проблеме точно решаемых задач — разделу квантовой теории, который активно развивается. Среди современных направлений поиска новых точных решений уравнения Шредингера, кроме упомянутых солитонного и спинного, можно назвать [3] разнообразные варианты метода факторизации,

трансформации дифференциальных уравнений, методы суперсимметрии, преобразование Дарбу, теоретико-групповые подходы, различные обобщения существующих точно решаемых задач и т. п. Правда, при этом появляются более сложные конструкции для потенциалов, энергетического спектра и волновых функций.

2. Рассмотрим основные свойства потенциалов солитонной природы. Сведения о солитонобразных полях, которые можно получить из теории солитонов, далеко не исчерпывают их особенностей. При более детальном исследовании у них можно обнаружить много интересных свойств. Так, отсутствует информация о явном виде волновых функций связанных стационарных состояний, поскольку в так называемые данные рассеяния входят лишь их асимптотики.

Естественно, что основное внимание при разработке метода обратной задачи рассеяния в теории солитонов было приковано к решению задачи Коши, а ассоциированное уравнение Шредингера при этом играло вспомогательную роль, так что многие чисто квантовомеханические особенности и сам факт появления новых точно решаемых моделей не были специально отмечены.

Если задать N произвольно выбранных параметров $0 < \kappa_{N-1} < \kappa_{N-2} < \dots < \kappa_0$, то можно построить семейство пространственно локализованных потенциалов с помощью компактных формул

$$u(x) = -2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln[\det(F_{mn})]; \quad (1)$$

$$F_{mn} = \delta_{mn} + 2 \frac{\sqrt{\kappa_m \kappa_n}}{\kappa_m + \kappa_n} \exp(\varphi_m + \varphi_n);$$

$$\varphi_n = \gamma_n + \Delta_n; \quad \gamma_n = \kappa_n x - 4\kappa_n^3 t + \delta_n; \quad (2)$$

$$m, n = 0, 1, \dots, N-1,$$

где δ_{mn} — символ Кронекера. Нумерация отвечает принятой в квантовой механике для связанных стационарных состояний, а безразмерные величины типичны для теории солитонов.

Величина t в потенциалах (1), которая имеет физический смысл времени для солитонов, тут является постоянным вспомогательным параметром, который будем называть "квизвременем", а "фазовые" величины Δ_n зависят от энергетических параметров κ_m :

$$\Delta_n = \frac{1}{2} \sum_{m=0, m \neq n}^{N-1} \ln \left| \frac{\kappa_n + \kappa_m}{\kappa_n - \kappa_m} \right|, \quad N > 1; \quad (3)$$

$$\Delta_n = 0, \quad N = 1$$

Особые фазовые добавки δ_n определяют симметрию моделей (1).

Для потенциальных энергий (1) стационарное уравнение Шредингера в координатном представлении

$$\frac{d^2 \psi_n}{dx^2} + [E - u(x)] \psi_n = 0 \quad (4)$$

имеет связанные стационарные состояния с уровнями энергии $E_n = -\kappa_n^2$ и соответствующими нормированными волновыми функциями ψ_n , которые непосредственно можно получить из неоднородной системы N линейных уравнений

$$\sum_{m=0}^{N-1} F_{nm} \psi_m = \sqrt{2\kappa_n} \exp(\varphi_n), \quad (5)$$

Вещественные потенциалы (1) обращаются в нуль при $|x| \rightarrow \infty$ и имеют отрицательный знак $u(x) < 0 \quad \forall x$, а их деформации при изменении квазивремени t происходят с сохранением площади, так

что $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x) dx = -4 \sum_{n=0}^{N-1} \kappa_n$. При $t \rightarrow \pm \infty$ потенциал

$u(x)$ состоит из N отдельных неодинаковых ям Эккарта, которые при $t = 0$ объединяются в составную яму, имеющую разнообразные как симметричные (если все $\delta_n = 0$), так и несимметричные формы.

Детерминант, входящий в выражение (1), целесообразно представить в несколько более развернутой форме

$$\det(F_{mn}) = 2 \exp(G) d_N, \quad (6)$$

где $d_N = \text{ch}(G) + \sum_{n=0}^{N-1} \exp(2\Delta_n) \text{ch}(G - 2\gamma_n) + \dots$;

$$G = \sum_{n=0}^{N-1} \gamma_n; \quad N > 1; \quad d_1 = \text{ch} \gamma_0.$$

При этом формула для потенциала (1) приобретает вид

$$u(x) = -2[d_N'' d_N - (d_N')^2] / d_N^2, \quad (7)$$

удобный как для изучения общих свойств, например свойств симметрии, так и для построения при каждом конкретном значении N . Здесь штрихи обозначают производные по x .

Из выражений (5) и (6) вытекает, что в общем случае количество независимых параметров, которые определяют форму N -уровневых потенциалов (7), равно $2(N-1)$. Среди этих моделей есть класс таких, что при $t = 0$ и всех $\delta_n = 0$ имеют форму ямы Эккарта $u(x) = -N(N-1)\kappa^2 / \text{ch}^2 \kappa x$ с уровнями энергии $E_n = -(N-n)^2 \kappa^2$.

Таким образом, в отличие от других случаев с точными решениями в квантовой механике, когда задается потенциал и решается уравнение Шредингера [2] (задача о собственных значениях), в результате

чего получаются уровни энергии и соответствующие волновые функции, в моделях солитонного происхождения произвольно выбираются уровни энергии и для них строятся достаточно простые потенциалы с точными решениями. Еще одной важной особенностью потенциалов солитонной природы является то, что для каждого набора уровней энергии находится не один фиксированный профиль потенциала, а бесконечное многопараметрическое семейство потенциальных моделей.

В области непрерывного спектра энергии $E > 0$ в уравнении (4) потенциалы (1) обладают свойством сверхпрозрачности: согласно стационарной теории рассеяния квантовые частицы проходят сквозь них (1) безотражательно. Однако эти потенциалы не являются "невидимками", ибо в нестационарной теории будут наблюдаться локальные особенности движения волновых пакетов и интегральные эффекты типа временного сдвига по сравнению со свободным движением [5].

3. Приведем некоторые конкретные примеры потенциальных полей.

В случае $N = 1$ форма модели (1) фиксирована — это одноуровневая яма Экарта с $E_0 = -\kappa_0^2$ для которой всегда можно выбрать начало отсчета координаты x таким образом, чтобы $u(x) = -2\kappa_0^2 / \text{ch}^2 \kappa_0 x$

Тогда соответствующая волновая функция основного состояния согласно уравнению (5) равна

$$\psi_0(x) = \sqrt{\frac{\kappa_0}{2}} \frac{1}{\text{ch} \kappa_0 x}. \quad (8)$$

В случае $N = 2$ модели (1) уже имеют достаточно разнообразные формы (с одним или двумя минимумами, включая минимум 4-го порядка), которые определяются двумя параметрами: квазивременем t и отношением энергетических величин κ_0 / κ_1 (фазовые добавки δ_0 и δ_1 можно сделать равными нулю выбором начала отсчета x и t). Формулу (7) для потенциальной энергии можно преобразовать к виду

$$u(x) = -8 \exp(2\Delta) (\kappa_1^2 \text{sh}^2 \gamma_0 + \kappa_0^2 \text{ch}^2 \gamma_1) / d_2^2, \quad (9)$$

где в соответствии с (6)

$$d_2 = \text{ch}(\gamma_1 + \gamma_0) + \exp(2\Delta) \text{ch}(\gamma_1 - \gamma_0), \quad (10)$$

а согласно (3)

$$\Delta \equiv \Delta_0 = \Delta_1 = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\kappa_0 + \kappa_1}{\kappa_0 - \kappa_1} \right). \quad (11)$$

Соответственно, решая систему (5), приходим к формулам для волновых функций основного и первого возбужденного состояний

$$\begin{aligned} \psi_0(x) &= \sqrt{2\kappa_0} \exp(\Delta) \frac{\text{ch} \gamma_1}{d_2} \\ \psi_1(x) &= -\sqrt{2\kappa_1} \exp(\Delta) \frac{\text{sh} \gamma_0}{d_2} \end{aligned} \quad (12)$$

Уровни энергии равны $E_0 = -\kappa_0^2$ и $E_1 = -\kappa_1^2$. Координата x входит в выражения для потенциала (9), (10) и волновых функций (12) через линейную зависимость от x величин γ_n в (2).

Если одно- и двухуровневые формы потенциалов (1) знакомы по соответствующим солитонным профилям, то этого нельзя сказать уже про трехуровневые модели, когда имеется четыре независимых параметра: отношения энергетических величин, например κ_1 / κ_2 и κ_0 / κ_2 , квазивремя t и одна из фазовых добавок, например δ_2 (две другие влияют только на начало отсчета x и t , так что их можно считать равными нулю). Если при этом $t = 0$ и $\delta_2 = 0$, то имеем симметричные формы потенциалов (1), то есть четные функции $u(-x) = u(x)$, которые при $x = 0$ равны $u(0) = -2(\kappa_0^2 - \kappa_1^2 + \kappa_2^2)$.

Исследование показывает, что при условии $\kappa_0^4 - 4(\kappa_1^2 - \kappa_2^2)\kappa_0^2 + (\kappa_1^2 - \kappa_2^2)(3\kappa_1^2 - \kappa_2^2) = 0$ возникают экстремумы 4-го порядка. На плоскости $(\kappa_1^2 / \kappa_2^2, \kappa_0^2 / \kappa_2^2)$ это отвечает ветви гиперболы, часть которой принадлежит четверным минимумам, а другая часть — четверным максимумам. На стыке минимумов и максимумов имеется минимум 6-го порядка при значениях $\kappa_1 / \kappa_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ и $\kappa_0 / \kappa_2 = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$.

При $t \neq 0$ и(или) $\delta_2 \neq 0$ получаем несимметричные профили (рис.1).

Для изучения потенциалов солитонного типа нами было проведено также компьютерное моделирование влияния различных параметров на форму моделей (1). Аналитические результаты при этом проверяются и существенно дополняются в условиях компьютерной визуализации.

Что касается волновых функций, то в случае $N = 3$ из системы уравнений (5) имеем для них такие выражения в основном и двух возбужденных состояниях:

$$\begin{aligned} \psi_0(x) &= \sqrt{2\kappa_0} \exp(\Delta_0) [\text{ch}(\gamma_1 + \gamma_2) + \exp(\Delta_2 + \Delta_1 - \Delta_0) \text{ch}(\gamma_1 - \gamma_2)] / d_3; \\ \psi_1(x) &= -\sqrt{2\kappa_1} \exp(\Delta_1) [\text{sh}(\gamma_0 + \gamma_2) + \exp(\Delta_2 + \Delta_0 - \Delta_1) \text{sh}(\gamma_0 - \gamma_2)] / d_3; \\ \psi_2(x) &= \sqrt{2\kappa_2} \exp(\Delta_2) [\text{ch}(\gamma_0 + \gamma_1) - \exp(\Delta_1 + \Delta_0 - \Delta_2) \text{ch}(\gamma_0 - \gamma_1)] / d_3. \end{aligned} \quad (13)$$

где в соответствии с (6)

$$d_3 = \operatorname{ch}(\gamma_2 + \gamma_1 - \gamma_0) + \exp(2\Delta_2) \operatorname{ch}(\gamma_1 + \gamma_0 - \gamma_2) + \exp(2\Delta_1) \operatorname{ch}(\gamma_2 + \gamma_0 - \gamma_1) + \exp(2\Delta_0) \operatorname{ch}(\gamma_2 + \gamma_1 - \gamma_0) \quad (14)$$

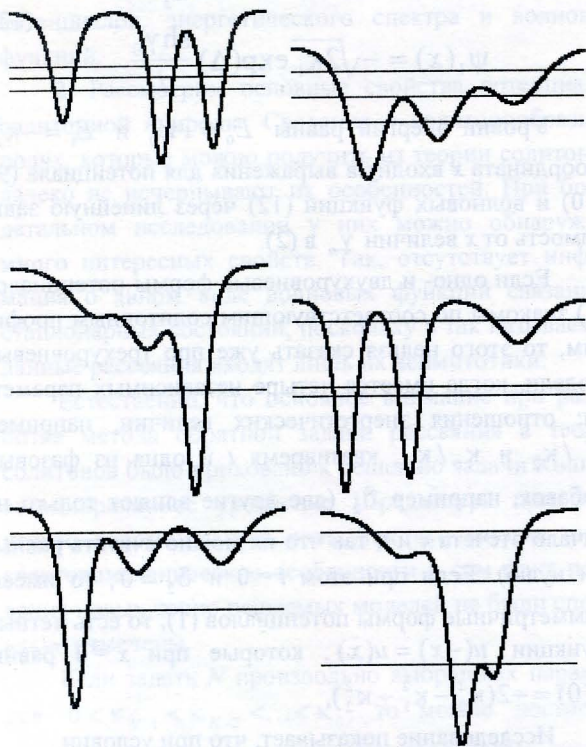


Рис. 1. Некоторые типичные профили трехуровневых несимметричных потенциальных ям солитонного происхождения.

Добавим, что результаты для $N=2$ можно получить предельным переходом $\kappa_2 \rightarrow 0$ в формулах (13) и (14) с учетом явного вида величин γ_n из (2) и Δ_n из (3).

В случае $N=4$, если $t=0$ и все $\delta_n=0$, потенциальные энергии (1) при $x=0$ принимают значения $u(0) = -2(\kappa_0^2 - \kappa_1^2 + \kappa_2^2 - \kappa_3^2)$, а их экстремумам 4-го порядка в пространстве переменных $(\kappa_2^2/\kappa_3^2, \kappa_1^2/\kappa_3^2, \kappa_0^2/\kappa_3^2)$ отвечает однополостный гиперboloид, внутри которого потенциал имеет максимумы, а снаружи — минимумы. На этой поверхности проходят также линии экстремумов 6-го порядка, пересечение которых дает точку минимума 8-го порядка, где

$$u(x) = -2(3 + \sqrt{5})\kappa_3^2 + \frac{4}{315}(123 + 55\sqrt{5})\kappa_3^{10}x^8 + O(x^{10}),$$

при таких значениях энергетических параметров:

$$\kappa_2 / \kappa_3 = \sqrt{(5 + \sqrt{5})/2};$$

$$\kappa_1 / \kappa_3 = \sqrt{(7 + 3\sqrt{5})/2}; \quad \kappa_0 / \kappa_3 = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}.$$

Аналогичные особенности имеют и многоуровневые модели с $N > 4$.

4. Таким образом, количество потенциалов с простыми точными решениями в квантовой механике существенно обогащается многопараметрическими моделями разнообразного вида.

Кроме локализованных солитоноподобных потенциалов с точными решениями, есть так называемые конечнозонные периодические (и почти периодические) потенциалы [1], которых мы не затрагиваем.

Говоря об общей роли точных решений уравнения Шредингера, необходимо прежде всего подчеркнуть, что в квантовой механике они являются основой главного раздела — теории стационарных состояний [2], изучение физических свойств которых происходит на конкретных примерах с точными решениями, используемыми также для иллюстративных упражнений. Кроме того, одним из основных теорфизических приемов является сведение задачи к хорошо известной, так что точные решения становятся фундаментом новых задач. Поскольку в основе теории возмущений лежит представление о некотором известном точном решении, к которому в первом приближении сводится данная задача и с помощью которого строятся дальнейшие уточнения, то именно точные решения являются базой приближенных методов. Добавим, что простые модели часто используются при изучении сложных явлений с неизвестными закономерностями. Необходимо отметить, что проверка новых теорий тоже обычно осуществляется на основе точно решаемых задач. Они также полезны как тестовые примеры при применении численных методов, которые отрабатываются и проверяются на соответствующих точных решениях.

Обобщая, можно сказать, что точные решения уравнения Шредингера, особенно с простыми явными аналитическими выражениями для потенциалов, уровней энергии и волновых функций стационарных состояний, образуют незыблемое ценное достояние квантовой теории.

Постановка вопроса о точных решениях уравнения Шредингера солитонной природы в литературе по квантовой механике, за исключением [5], по всей видимости, в этом аспекте еще не отмечалась.

Авторы благодарны О.Б.Заславскому за обсуждение результатов работы.

1. В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, Л.П. Питаевский, *Теория солитонов*, Наука, Москва (1980).
2. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Наука, Москва (1989).
3. V.V. Ulyanov, O.B. Zaslavskii, *Phys. Rep.* **216**, 179 (1992).
4. В.В. Ульянов, О.Б. Заславский, Ю.В. Василевская, *ФНТ*, **23**, 110 (1997).
5. В.В. Ульянов. *Методы квантовой кинетики*, Высшая школа, Харьков (1987).

Exact solutions of Schrodinger equation in the case of soliton type models of potential fields

J.V.Vasilevskaya, V.V.Ulyanov

Peculiarities of exact solutions of the Schrodinger equation with simple explicit analytic expressions of potential fields, energy levels, and wave functions of stationary states are considered. They appeared owing to methods developed in the soliton theory. Character forms of three- and four-level potentials and phase additions defining nonsymmetric behavior of potential models are obtained. Explicit formulae for corresponding wave functions of stationary states are deduced and generalizations to multi-level cases are discussed.

К теории квантовых ангармонических осцилляторов

Ю.В. Василевская, В.В. Ульянов

Харьковский государственный университет,

Украина, 316077, г. Харьков, пл. Свободы 4

E-mail: Vladimir.V.Ulyanov@univer.kharkov.ua

Предложен новый метод расчёта уровней энергии для четверного осциллятора с помощью точных решений для спиновых эффективных потенциалов с минимумом 4-го порядка.

Запропоновано новий метод розрахунку рівнів енергії для четверного осцилятора за допомогою точних розв'язків для спінових ефективних потенціалів з мінімумом 4-го порядку.

PACS: 03.65.-w

Во многих вопросах квантовой теории [1-5] возникает задача об энергетическом спектре одночастичного гамильтониана с потенциальной энергией

$$U(x) = Cx^4 + Wx^2, \quad (C > 0), \quad (1)$$

где основным является четверной член, а квадратичный играет второстепенную роль, хотя и приводит при $W < 0$ к наличию двух минимумов (двойная потенциальная яма).

Известно, что даже для чисто четверного осциллятора уравнение Шредингера не имеет точного решения, не говоря уже о смешанном осциляторе. Среди методов вычисления уровней энергии таких систем можно отметить квазиклассическое приближение, диагонализацию усечённой матрицы гамильтониана в представлении гармонического осциллятора, разложение в ряды, теорию возмущений и др. [2-5].

Предлагаемый нами новый способ получения уровней энергии основывается на найденных недавно [6, 7] с помощью теории спиновых систем точных решениях для гамильтонианов с потенциалом, построенным из гиперболических функций:

$$U(x) = \frac{B^2}{4} \operatorname{sh}^2 x - B(S + \frac{1}{2}) \operatorname{ch} x, \quad (2)$$

где величина $B > 0$ может изменяться непрерывно, а S принимает целые и полуцелые неотрицательные значения. Как будет видно из дальнейшего, при соответ-

ствующем выборе параметров можно аппроксимировать потенциал степенного осциллятора (1) таким "спиновым" потенциалом.

Заметим, что во всех формулах без ограничения общности используются безразмерные величины, которые в стационарном уравнении Шредингера

$$\psi'' + \frac{2m}{\hbar^2} [E - U(x)] \psi = 0$$

для рассматриваемых задач соответствуют значению $\frac{2m}{\hbar^2} = 1$.

В случае чисто четверного осциллятора

$$U^{(q)}(x) = x^4 \quad (3)$$

(в дальнейшем будем называть эту модель 4-степенной и отмечать индексом "q" – от "quartic"), где для упрощения выкладок опускаем возможный коэффициент C перед x^4 , при наличии которого уровни энергии будут умножаться на $C^{1/3}$, целесообразно установить полезные для наших целей связи между средними значениями степеней координат $\langle x^r \rangle_n^{(q)}$ в стационарных состояниях с номером n и соответствующими уровнями энергии $E_n^{(q)}$ в виде так называемых вириальных рекуррентных соотношений [8]:

$$\langle x^{k+4} \rangle_n^{(q)} = \frac{k+1}{k+3} E_n^{(q)} \langle x^k \rangle_n^{(q)} + \frac{k(k^2-1)}{4(k+3)} \langle x^{k-2} \rangle_n^{(q)}. \quad (4)$$

В частности, при $k = 0$ получаем теорему вириала

$$\langle x^4 \rangle_n^{(q)} = \frac{1}{3} E_n^{(q)}, \quad (5)$$

при $k = 2$ согласно (4) имеем выражение

$$\langle x^6 \rangle_n^{(q)} = \frac{3}{5} E_n^{(q)} \langle x^2 \rangle_n^{(q)} + \frac{3}{10}, \quad (6)$$

которое будет использовано при расчётах по теории возмущений, а при $k = 4$ приходим к аналогичному соотношению для приближений более высокого порядка:

$$\langle x^8 \rangle_n^{(q)} = \frac{5}{7} E_n^{(q)} \langle x^4 \rangle_n^{(q)} + \frac{15}{7} \langle x^2 \rangle_n^{(q)}, \quad (7)$$

где величина $\langle x^4 \rangle_n^{(q)}$ определяется из (5).

Для справок и оценок погрешностей при расчётах по теории возмущений приводим численные значения основного уровня энергии и дисперсии координат в основном состоянии 4-степенного осциллятора:

$$E_0^{(q)} = 1.06036; \quad \langle x^2 \rangle_0^{(q)} = 0.362023. \quad (8)$$

Спиновый потенциал (2) можно записать, перестроив гиперболические функции:

$$U(x) = -B_0 B / 2 + B^2 \operatorname{sh}^4(x/2) + B(B - B_0) \operatorname{sh}^2(x/2), \quad (9)$$

$$B_0 = 2S + 1.$$

Замечаем, что при $B = B_0$ он также имеет минимум 4-го порядка в начале координат:

$$U^{(h)}(x) = -B_0^2 / 2 + B_0^2 \operatorname{sh}^4(x/2), \quad (10)$$

так что будем называть эту модель 4-гиперболической (индекс "h" – от "hyperbolic"). Как будет показано, она хорошо аппроксимирует 4-степенной потенциал (3).

Используемые точные решения имеют тесную связь со спиновыми системами и отвечают собственным значениям гамильтониана $H = -S_z^2 - BS_x$, представленного также в безразмерном виде и описывающего так называемый легкоосный парамагнетик во внешнем магнитном поле B , направленном перпендикулярно оси анизотропии z [6, 7]. При этом собственные значения такого гамильтониана совпадают с нижними $2S+1$ уровнями энергии для потенциала (2). Точные значения уровней энергии (здесь мы ограничимся примерами только для основного уровня) 4-гиперболического потенциала (10) имеют особенно простой вид в случае небольших значений S : при $S = 0$ имеем $E_0^{(h)} = 0$, при $S = \frac{1}{2}$ получается

$$E_0^{(h)} = -\frac{5}{4}, \quad \text{при } S = 0 \text{ основной уровень равен}$$

$$E_0^{(h)} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{37}}{2}, \quad \text{а при } S = \frac{3}{2} \text{ он равен}$$

$$E_0^{(h)} = -\frac{13}{4} - \sqrt{13}. \quad \text{При "средних" значениях } S \text{ фор-}$$

мулы для уровней энергии содержат тригонометриче-

ские и обратные им функции: при $S = 2$ для основного уровня энергии получается выражение

$$E_0^{(h)} = -\frac{5}{3} + \frac{2}{3} \sqrt{313} \cos \left[\frac{1}{3} \arccos \frac{1765}{313^{3/2}} + \frac{2\pi}{3} \right],$$

а при $S = \frac{5}{2}$ имеется формула с подобной структурой

$$E_0^{(h)} = -\frac{71}{12} + \frac{4}{3} \sqrt{97} \cos \left[\frac{1}{3} \arccos \frac{601}{194\sqrt{97}} + \frac{2\pi}{3} \right],$$

при $S = 3$ приходим к несколько более сложной форме

$$E_0^{(h)} = -\frac{7}{2} - \sqrt{y} - \sqrt{\frac{1029}{4} - y - \frac{383}{\sqrt{y}}},$$

где

$$y = \frac{343}{4} + \frac{1}{2} \sqrt{59465} \cos \left[\frac{1}{3} \arccos \frac{11591451}{59465^{3/2}} \right],$$

а при $S = \frac{7}{2}$ получаем также аналогичное выражение

$$E_0^{(h)} = -\frac{37}{4} - \sqrt{y} - \sqrt{301 - y - \frac{480}{\sqrt{y}}},$$

где

$$y = \frac{301}{3} + \frac{2}{3} \sqrt{45853} \cos \left[\frac{1}{3} \arccos \frac{7844779}{45853^{3/2}} \right].$$

При $S > 7/2$ уровни энергии являются корнями полиномов соответствующей степени, которые можно построить, например на основе метода конечных цепных дробей в виде рекуррентных соотношений [6].

Представив 4-гиперболическую модель (10) в форме разложения по степеням x :

$$U^{(h)}(x) = -\frac{1}{2} B_0^2 + \frac{1}{16} B_0^2 x^4 + \frac{1}{96} B_0^2 x^6 + O(x^8), \quad (11)$$

произведем преобразование $x \rightarrow G^{-(1/6)} x$ с $G = B_0^2 / 16$ в уравнении Шредингера:

$$\frac{d^2 \psi_n}{dx^2} + \left[\frac{E_n^{(h)} + B_0^2 / 2}{G^{1/3}} - x^4 - \frac{x^6}{6G^{1/3}} - \dots \right] \psi_n = 0. \quad (12)$$

Отсюда на основании теории возмущений устанавливаем связь энергетических уровней 4-гиперболического и 4-степенного потенциалов:

$$\frac{E_n^{(h)} + B_0^2 / 2}{G^{1/3}} = E_n^{(q)} + \frac{\langle x^6 \rangle_n^{(q)}}{6G^{1/3}} + \dots \quad (13)$$

В первом приближении, при отбрасывании поправочных членов, для соответствующих уровней энергии четверного осциллятора из (13) вытекает соотношение

$$E_n^{(q)(1)} = \frac{E_n^{(h)} + B_0^2 / 2}{G^{1/3}}. \quad (14)$$

Первый поправочный член в (13) с помощью вириального соотношения (6) дает возможность оценить

относительную ошибку, к которой приводит приближение (14):

$$\delta_n \equiv \frac{E_n^{(q)(1)} - E_n^{(q)}}{E_n^{(q)}} = \frac{\langle x^6 \rangle_n^{(q)}}{6G^{1/3} E_n^{(q)}} = \frac{E_n^{(q)} \langle x^2 \rangle_n^{(q)} / 10 + 1/20}{G^{1/3} E_n^{(q)}}. \quad (15)$$

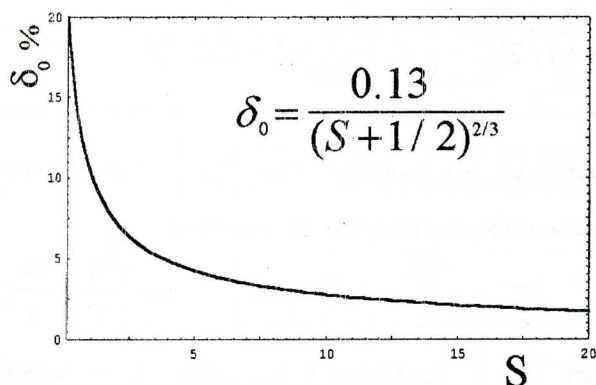


Рис. 1. Зависимость относительной ошибки первого приближения от спинного параметра S при расчете основного уровня энергии четверного осциллятора на основе 4-гиперболической модели потенциала.

В частности, для основного уровня с учетом численных значений (8) ошибка равна

$$\delta_0 = \frac{0.132}{(S + 1/2)^{2/3}}. \quad (16)$$

Таким образом, даже в самом грубом приближении обеспечивается достаточно высокая точность уже при небольших значениях параметра S (см. рис. 1). Так, если при $S=2$ относительная ошибка составляет 7%, а при $S=10$ она равна 3%, то уже при $S=50$ имеем 1%. Для возбужденных состояний ошибка (15) больше, так как 4-гиперболический потенциал растет быстрее 4-степенного (см. рис. 2).

Если же воспользоваться следующим приближением теории возмущений на основе (13), то приходим к формуле, уточняющей соотношение (14):

$$E_n^{(q)(2)} = \frac{E_n^{(h)} + B_0^2 / 2 - 1/20}{G^{1/3} + \langle x^2 \rangle_n^{(q)} / 10}, \quad (17)$$

при применении которой относительная ошибка по сравнению с таковой для первого приближения уменьшается по абсолютной величине на порядок и более.

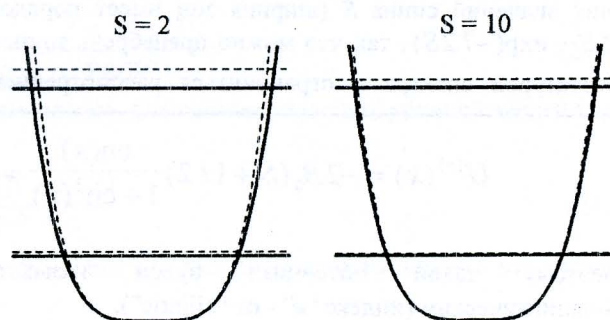


Рис. 2. Иллюстрация к аппроксимации 4-степенного потенциала (сплошные линии) с помощью 4-гиперболической модели (штриховые линии).

Таким образом, предложенный метод расчета энергетического спектра 4-степенного осциллятора на основе точных уровней энергии соответствующей 4-гиперболической модели оказывается весьма эффективным. При этом повышение точности расчета может производиться как путем использования больших значений параметра S в формуле (14), так и на основе уточненной формулы (17).

Еще лучшие результаты дает аналогичный подход, основанный на точных решениях, соответствующих периодической модели спинного потенциала с минимумом 4-го порядка, построенной из эллиптических функций [6, 7], поскольку разложение типа (11) для такого потенциала не содержит члена с x^6 , в связи с чем относительная ошибка определяется вкладом порядка x^8 (как для ее оценки, так и для уточненного расчета вириальное соотношение (7) здесь оказывается весьма кстати).

Далее и перейдем к использованию такой модели эффективного потенциала, соответствующей спиновой системе с гамильтонианом $H = \alpha S_z^2 - \beta S_y^2 - BS_x$, отвечающим так называемому двухосному парамагнетизму в магнитном поле, перпендикулярном осям анизотропии:

$$U(x) = \frac{[B^2 / 4 - \alpha\beta S(S+1)]\text{sn}^2(x) - (\alpha + \beta)B(S + 1/2)\text{cn}(x)}{\alpha + \beta \text{cn}^2(x)}, \quad (18)$$

где эллиптические функции Якоби $\text{sn}(x)$ и $\text{cn}(x)$ имеют модуль $\sqrt{\beta / (\alpha + \beta)}$. При этом соответствующее уравнение Шредингера записывается в виде

$$(\alpha + \beta) \frac{d^2 \psi}{dx^2} + [E - U(x)]\psi = 0. \quad (19)$$

Собственные значения спин-гамильтониана совпадают с $2S+1$ крайними уровнями энергии низших

энергетических зон (чередующимися дном и потолком зоны) в потенциальном поле (18), однако при рассматриваемых далее параметрах потенциала зоны оказываются чрезвычайно узкими даже для небольших значений спина S (ширина зон имеет порядок $\Delta E \sim \exp(-7.2S)$), так что можно пренебречь зонной структурой спектра и ограничиться рассмотрением

$$U^{(e)}(x) = -2B_0(S+1/2) \frac{\text{cn}(x)}{1+\text{cn}^2(x)} = -B_0(S+1/2) \left[1 - \frac{1}{8}x^4 + \frac{3}{640}x^8 + O(x^{12}) \right], \quad (20)$$

поэтому такой потенциал будем называть 4-эллиптическим (индекс "e" - от "elliptic").

Точные значения уровней энергии (здесь мы вновь ограничиваемся примерами только для основного уровня и используем нумерацию уровней, соответствующую спиновому гамильтониану) 4-эллиптического потенциала (20) также имеют особенно простой вид в случае небольших значений S : при $S = \frac{1}{2}$

получается $E_0^{(e)} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, а при $S = 1$ основной уровень равен $E_0^{(e)} = -3$, при $S = \frac{3}{2}$ расчёт даёт

$E_0^{(e)} = -\frac{\sqrt{15}}{2} - 3\sqrt{2}$, при $S = 2$ имеем $E_0^{(e)} = -6\sqrt{3}$, при $S = 3$ вычисления дают $E_0^{(e)} = -\sqrt{33+4\sqrt{54}}$, а при $S = 4$ получаем $E_0^{(e)} = -\sqrt{6\sqrt{153} + \sqrt{6465}}$.

При "средних" полуцелых значениях S формулы для уровней энергии содержат тригонометрические и

отдельной ячейки периодического потенциала.

В случае одинаковых констант анизотропии $\alpha = \beta$, которые положим равными единице, при значении магнитного поля $B = B_0 = 2\sqrt{S(S+1)}$ периодический потенциал (18) имеет ячейки с минимумом 4-го порядка:

обратные им функции: при $S = \frac{5}{2}$ для основного уровня энергии получается выражение

$$E_0^{(e)} = -\frac{35}{2} + 4\sqrt{14} \cos\left[\frac{1}{3} \arccos \frac{\sqrt{10}}{28} + \frac{2\pi}{3}\right],$$

при $S = \frac{7}{2}$ приходим к несколько более сложной форме

$$E_0^{(e)} = -\frac{3}{2}\sqrt{7} - \sqrt{y} - \sqrt{378 - y - \frac{72\sqrt{7}}{\sqrt{y}}},$$

где $y = 126 + 84\sqrt{5} \cos\left[\frac{1}{3} \arccos \frac{444}{245\sqrt{5}}\right]$.

При $S = 5$ имеем

$$E_0^{(e)} = -\sqrt{1617 + 144\sqrt{154} \cos\left[\frac{1}{3} \arccos \frac{131\sqrt{11}}{378\sqrt{14}}\right]},$$

а при $S = 6$ получаются аналогичные значения

$$E_0^{(e)} = -\sqrt{3640 + 56\sqrt{3289} \cos\left[\frac{1}{3} \arccos \frac{1363837}{161161\sqrt{3289}}\right]}.$$

При $S = 7$ получается несколько более сложное выражение

$$E_0^{(e)} = -\sqrt{5481 + \sqrt{y} + \sqrt{18863712 - y + \sqrt{\frac{7437878784}{\sqrt{y}}}}},$$

где $y = 2016\{3119 + 10\sqrt{213637} \cos\left[\frac{1}{3} \arccos \frac{596984596}{7(213637)^{3/2}}\right]\}$,

При полуцелых $S > 7/2$ и целых $S > 8$ уровни энергии являются корнями полиномов соответствующей степени, которые можно построить, например, на основе метода конечных цепных дробей в виде рекуррентных соотношений [6].

Произведя преобразование $x \rightarrow G^{-1/6}x$ с $G = B_0(S+1/2)/16$ и перестраивая энергетические величины, преобразуем уравнение (19) к виду

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \left[\frac{E^{(e)} + B_0(S+1/2)}{2G^{1/3}} - \frac{U^{(e)}(x/G^{1/6}) + B_0(S+1/2)}{2G^{1/3}} \right] \psi = 0, \quad (21)$$

а подставляя сюда 4-эллиптическую модель (20) в форме разложения по степеням x , приходим к уравнению

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \left[\frac{E^{(e)} + B_0(S+1/2)}{2G^{1/3}} - x^4 + \frac{3x^8}{80G^{2/3}} + \dots \right] \psi = 0, \quad (22)$$

из которого согласно теории возмущений вытекает связь уровней энергии 4-степенного и 4-эллиптического потенциалов:

$$\frac{E_n^{(e)} + B_0(S+1/2)}{2G^{1/3}} = E_n^{(q)} - \frac{3 \langle x^8 \rangle_n^{(q)}}{80G^{2/3}} + \dots \quad (23)$$

В первом приближении, при отбрасывании поправочных членов, для соответствующих уровней энергии четверного осциллятора из (23) выводим соотношение

$$E_n^{(q)(1)} = \frac{E_n^{(e)} + B_0(S+1/2)}{2G^{1/3}}. \quad (24)$$

Поправочный член в (23) с помощью вириального соотношения (7) дает возможность оценить относительную ошибку, к которой приводит аппроксимация (24):

$$\delta_n \equiv \frac{E_n^{(q)(1)} - E_n^{(q)}}{E_n^{(q)}} = -\frac{3 \langle x^8 \rangle_n^{(q)}}{80G^{2/3} E_n^{(q)}} = -\frac{E_n^{(q)2} + 9 \langle x^2 \rangle_n^{(q)}}{112G^{2/3} E_n^{(q)}}. \quad (25)$$

В частности, учитывая численные значения (8) и приближение $B_0 \approx 2S+1$, получаем для основного уровня энергии простую формулу для относительной ошибки:

$$\delta_0 = -\frac{0.148}{(S+1/2)^{4/3}}, \quad (26)$$

из которой видно, что даже при небольших значениях параметра S обеспечивается достаточно высокая точность (см. рис. 3). Так, если при $S=2$ относительная ошибка составляет -4% , а при $S=10$ она равна -0.6% , то уже при $S=50$ имеем -0.08% .

Если же воспользоваться поправкой теории возмущений на основе (23), то приходим к формуле, уточняющей соотношение (24):

$$E_n^{(q)(2)} = \frac{E_n^{(e)} + B_0(S+1/2) + [(E_n^{(q)})^2 + 9 \langle x^2 \rangle_n^{(q)}] / 56G^{1/3}}{2G^{1/3}}, \quad (27)$$

при применении которой относительная ошибка по сравнению с таковой для первого приближения уменьшается по абсолютной величине на два-три порядка.

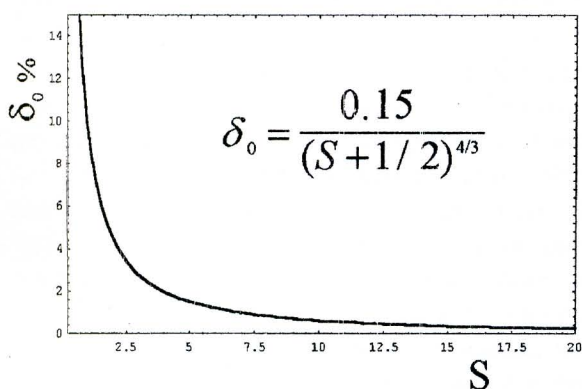


Рис. 3. Зависимость относительной ошибки первого приближения от спинового параметра S при расчёте основного уровня энергии четверного осциллятора на основе 4-эллиптической модели потенциала.

Что касается контроля точности получаемых ответов, то они основаны частично на известных численных данных для уровней энергии [3-5], а также на результатах наших компьютерных вычислений, базирующихся на методе стрельбы.

Заметим также, что мы ограничились вопросом о чисто четверном осцилляторе (3), связанном с моделями (10) и (20), тогда как подобным же образом решается задача и о смешанной квадратично-четверной модели (1) с помощью потенциалов (9) и (18), что, однако, должно явиться предметом отдельного рассмотрения.

В заключение добавим, что важное значение имеет и обратная сторона связи потенциалов для спиновых систем с моделью смешанного осциллятора, поскольку она обеспечивает расчёт более высоких уровней энергии ("надспиновых"), а также всего энергетического спектра в случае "внеспиновых" значений параметра S для рассмотренных эффективных потенциалов. В свое время именно для исследования физических свойств спиновых систем использовалась задача о смешанном осцилляторе [9].

Авторы благодарны О.Б. Заславскому за обсуждение результатов работы.

1. S.I. Chan, D. Stelman, L.E. Thompson, *J. Chem. Phys.*, **41**, 2828 (1964).
2. А.В. Турбинер, *УФН*, **144**, 35 (1984).
3. J.B. Krieger, M.L. Lewis, C. Rosenzweig, *J. Chem. Phys.*, **47**, 2942 (1967).
4. S.I. Chan, D. Stelman, *J. Mol. Spectr.*, **10**, 278 (1963).
5. D. Secrest, K. Cashion, J.O. Hirschfelder, *J. Chem. Phys.*, **37**, 830 (1962).
6. V.V. Ulyanov, O.B. Zaslavskii, *Phys. Rep.*, **216**, 179 (1992).
7. В.В. Ульянов, О.Б. Заславский, Ю.В. Василевская, *ФНТ*, **23**, 110 (1997).
8. В.В. Ульянов, *Задачи по квантовой механике и квантовой статистике*, Вища школа, Харьков (1980).
9. О.Б. Заславский, В.В. Ульянов, В.М. Цукерник, *ФНТ*, **9**, 511 (1983).

On the theory of quantum anharmonic oscillators

Yu.V. Vasilevskaya, V.V. Ulyanov

New method of a calculation of energy levels for a quartic oscillator by using of exact solutions for spin effective potentials with a fourth-order minimum is proposed.

К теории квантовых ангармонических осцилляторов. II

Ю.В. Василевская, В.В. Ульянов

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина,

Украина, 61077, г. Харьков, пл. Свободы 4

E-mail: Vladimir.V.Ulyanov@univer.kharkov.ua

Предложен новый метод расчёта уровней энергии для смешанного (квадратично-четверного) потенциала с помощью точных решений для спиновых систем.

Запропоновано новий метод розрахунку рівнів енергії для змішаного (квадратично-четверного) потенціалу за допомогою точних розв'язків для спинових систем.

PACS: 03.65.-w

В первой части нашей работы [1] рассматривалась задача об энергетическом спектре одночастичного гамильтониана с потенциальной энергией:

$$U(x) = Cx^4 + Wx^2, \quad (C > 0) \quad (1)$$

при $W = 0$, т. е. для чисто четверного осциллятора. Теперь мы полагаем, что $W \neq 0$. Такой смешанный потенциал можно аппроксимировать моделью, построенной из гиперболических функций [2-4]:

$$U(x) = \frac{B^2}{4} \operatorname{sh}^2 x - B\left(S + \frac{1}{2}\right) \operatorname{ch} x, \quad (2)$$

где S принимает целые и полуцелые неотрицательные значения, а величина $B > 0$ изменяется непрерывно и подстраивается под соответствующее значение параметра W . Будем называть эту модель гиперболической (индекс "h").

Для упрощения выкладок в (1) опускаем коэффициент C перед x^4 (при его наличии значения уровней нужно умножить на $C^{1/3}$, а параметр W – на $C^{2/3}$), т. е. рассмотрим потенциал

$$U(x) = x^4 + Wx^2. \quad (3)$$

Во всех формулах без ограничения общности мы используем безразмерные величины, которые в стационарном уравнении Шредингера

$$\psi'' + \frac{2m}{\hbar^2} [E - U(x)] \psi = 0 \quad \text{для рассматриваемых задач}$$

соответствуют значению $\frac{2m}{\hbar^2} = 1$.

Как и в [1], целесообразно установить связи между средними значениями $\langle x' \rangle_n$ в стационарных состояниях с номером n и соответствующими уровнями энергии E_n в виде вириальных рекуррентных соотношений [5]:

$$\begin{aligned} \langle x^{k+4} \rangle_n &= \frac{W(k+2)}{k+3} \langle x^{k+2} \rangle_n = \\ &= \frac{k+1}{k+3} E_n \langle x^k \rangle_n + \frac{k(k^2-1)}{4(k+3)} \langle x^{k-2} \rangle_n. \end{aligned} \quad (4)$$

В частности, при $k = 0$ получаем:

$$\langle x^4 \rangle_n = \frac{1}{3} E_n - \frac{2}{3} W \langle x^2 \rangle_n, \quad (5)$$

при $k = 2$:

$$\langle x^6 \rangle_n = \frac{8W^2 + 9E_n}{15} \langle x^2 \rangle_n - \frac{4W}{15} E_n + \frac{3}{10}, \quad (6)$$

при $k = 4$:

$$\begin{aligned} \langle x^8 \rangle_n &= \frac{15}{7} \langle x^2 \rangle_n + \frac{5}{7} E_n \langle x^4 \rangle_n - \\ &- \frac{6W}{7} \langle x^6 \rangle_n, \end{aligned} \quad (7)$$

где величины $\langle x^4 \rangle_n$ и $\langle x^6 \rangle_n$ определяются из (5) и (6).

Нетрудно убедиться, что, положив в формулах (5)-(7) $W = 0$, переходим к выражениям для средних, используемым в первой части работы [1].

Точные значения уровней энергии (ограничимся только примерами для основного уровня) потенциала (2) имеют следующий вид [2-4]: при $S = \frac{1}{2}$ получаем

$$E_0 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}B; \text{ при } S = 1 \text{ основной уровень энергии}$$

$$E_0 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + B^2}, \text{ а при } S = \frac{3}{2} \text{ он равен}$$

$$E_0 = -\frac{5}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{13 + 12B^2} \cos \left[\frac{1}{3} \arccos \frac{72B^2 - 35}{(13 + 12B^2)^{3/2}} + \frac{2\pi}{3} \right].$$

При $S = \frac{5}{2}$ соответствующая формула имеет вид:

$$E_0 = -\frac{35 + 6B}{12} + \frac{4}{3}\sqrt{7 - 3B + 3B^2} \cos \left[\frac{1}{3} \arccos \frac{36B^2 - 9B - 40}{4(7 - 3B + 3B^2)^{3/2}} + \frac{2\pi}{3} \right].$$

Для значения спина $S = 3$ основной уровень энергии

$$E_0 = -\frac{7}{2} - \sqrt{y} \mp \sqrt{\frac{49}{4} + 5B^2 - y + -(9 - 8B^2)/\sqrt{y}},$$

где

$$y = \frac{1}{12}(49 + 20B^2) + \frac{1}{6}\sqrt{889 + 712B^2 + 208B^4} \cos \left[\frac{1}{3} \arccos \frac{24013 - 24132B^2 + 21072B^4 + 2240B^6}{(889 + 712B^2 + 208B^4)^{3/2}} \right].$$

Для значений спина $S = 7/2$ и $S = 4$ расчёт даёт аналогичные выражения [4], которые здесь не приводятся ввиду их громоздкости.

Представив модель (2) в виде степенного ряда по x

$$U^{(h)}(x) = c_0 + c_2x^2 + c_4x^4 + c_6x^6 + O(x^8)$$

с коэффициентами

$$c_0 = -\frac{1}{2}BB_0, \quad c_2 = \frac{1}{4}B(B - B_0),$$

$$c_4 = \frac{1}{48}B(4B - B_0), \quad c_6 = \frac{1}{1440}B(16B - B_0), \quad (8)$$

где $B_0 = S + 1/2$, произведем преобразование $x \rightarrow c_4^{-1/6}x$. Тогда уравнение Шредингера запишется в виде

$$\frac{d^2\psi_n}{dx^2} + \left[\frac{E_n^{(h)} - c_0}{c_4^{1/3}} - \frac{c_2}{c_4^{2/3}}x^2 - x^4 - \frac{c_6}{c_4^{4/3}}x^6 - \dots \right] \psi_n = 0. \quad (9)$$

Отсюда можно установить связь между энергетическими уровнями смешанного потенциала (3) и модели (2):

$$E_0 = -\frac{5}{4} - \frac{B}{2} - \sqrt{1 - B + B^2}.$$

В случаях "средних" значений спина $S = 2, 5/2, 3, 7/2, 4$ возникают качественно новые структуры точных формул для уровней энергии [4], в которых фигурируют наряду с радикалами и полиномами также тригонометрические и обратные тригонометрические функции.

Так, при $S = 2$ для основного уровня энергии получаем следующее выражение:

$$\frac{E_n^{(h)} - c_0}{c_4^{1/3}} = E_n + \frac{c_6}{c_4^{4/3}} \langle x^6 \rangle_n + \dots, \quad (10)$$

где под E_n понимаются уровни энергии смешанного потенциала (3) с $W = c_2/c_4^{2/3}$.

Таким образом, для того чтобы найти для данного параметра W соответствующее ему значение B , необходимо решить уравнение $W - \frac{c_2}{c_4^{2/3}} = 0$. Подста-

вив выражения для коэффициентов из (8), получим уравнение 4-й степени

$$B^4 - 3B_0B^3 + (3B_0^2 - 4W^3/9)B^2 + (2W^3B_0/9 - B_0^3)B - W^3B_0^2/36 = 0,$$

точные решения которого можно найти, например, на основе метода Феррари (см. [4]).

В первом приближении из (9) имеем:

$$E_n^{(1)} = \frac{E_n^{(h)} + BB_0/2}{c_4^{1/3}}. \quad (11)$$

Первый поправочный член в (10) с помощью виртуального соотношения (6) даёт возможность оценить относительную ошибку приближения (11), при определении которой энергию отсчитываем от минимума

потенциала (3), равного $U_m = -W^2/4$, если $W < 0$, и $U_m = 0$, если $W > 0$:

$$\delta_n^{(1)} \equiv \frac{E_n^{(1)} - E_n}{E_n - U_m} = \frac{B(B - B_0/16) \langle x^6 \rangle_n}{90c_4^{4/3}(E_n - U_m)} = \frac{B(B - B_0/16)}{90c_4^{4/3}(E_n - U_m)} \times \left(\frac{8W^2 + 9E_n}{15} \langle x^2 \rangle_n - \frac{4W}{15} E_n + \frac{3}{10} \right). \quad (12)$$

Для небольших $|W| \approx 1$ относительная ошибка, как и в случае четверного осциллятора [1], имеет порядок $(S + 1/2)^{-2/3}$.

Второе приближение на основании (10) приводит к выражению для энергии

$$E_n^{(2)} = \frac{E_n^{(h)} + BB_0/2}{c_4^{1/3}} - \frac{B(B - B_0/16)}{90c_4^{4/3}} \langle x^6 \rangle_n = \frac{E_n^{(h)} + BB_0/2}{c_4^{1/3}} - \frac{B(B - B_0/16)}{90c_4^{4/3}} \times \left(\frac{8W^2 + 9E_n}{15} \langle x^2 \rangle_n - \frac{4W}{15} E_n + \frac{3}{10} \right).$$

Относительная ошибка для этого приближения оказывается порядка $(S + 1/2)^{-4/3}$.

При увеличении параметра W относительная ошибка уменьшается. Например, в случае $S = 10$ для основного уровня энергии при $W = -5$ относительная ошибка первого приближения составляет $\delta_0^1 = 39\%$, а для второго приближения она равна $\delta_0^{(2)} = -19\%$,

тогда как при $W = 0$ имеем $\delta_0^1 = 3\%$ и $\delta_0^{(2)} = -0.05\%$, а при $W = 5$ эти ошибки равны соответственно $\delta_0^1 = 0.2\%$ и $\delta_0^{(2)} = 0.002\%$.

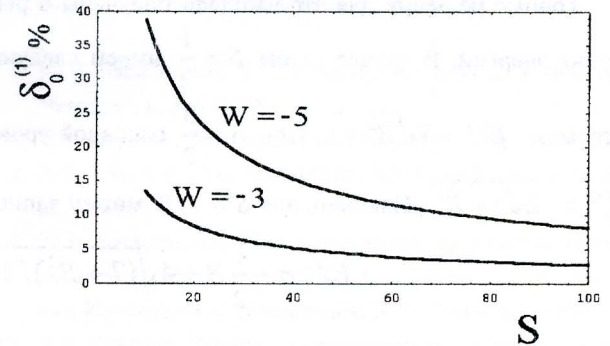


Рис. 1. Зависимость относительной ошибки первого приближения от спинного параметра S при расчёте основного уровня энергии смешанного осциллятора на основе гиперболической модели потенциала.

Таким образом, с помощью гиперболической модели (2) удастся аппроксимировать потенциал (3) с тем большей эффективностью, чем больше величина спина S и чем больше величина параметра W (см. рис. 1-2).

Как и в случае чисто четверного осциллятора [1], далее перейдем к рассмотрению эффективного потенциала, соответствующего спинной системе с гамильтонианом $H = \alpha S_z^2 - \beta S_y^2 - BS_x$, отвечающим так называемому двухосному парамагнетику в магнитном поле, перпендикулярном осям анизотропии [2]:

$$U^{(e)}(x) = \frac{[B^2/4 - \alpha\beta S(S+1)]\text{sn}^2(x) - (\alpha + \beta)B(S + 1/2)\text{cn}(x)}{\alpha + \beta\text{cn}^2(x)},$$

где эллиптические функции Якоби $\text{sn}(x)$ и $\text{cn}(x)$ имеют модуль $\sqrt{\beta/(\alpha + \beta)}$. Такой потенциал будем называть 4-эллиптическим (индекс "e" – от "elliptic").

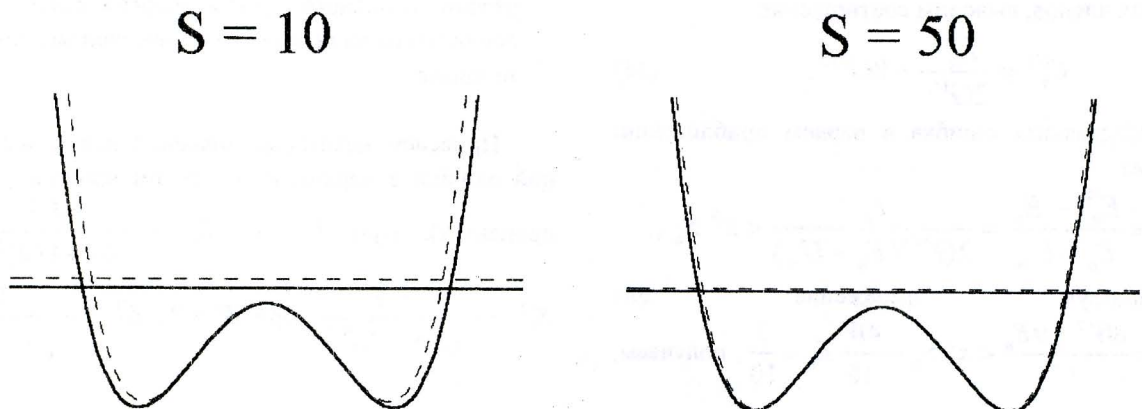


Рис. 2. Иллюстрация к аппроксимации квадратично-четверного потенциала (сплошные линии) с помощью гиперболической модели (штриховые линии).

В случае одинаковых констант анизотропии $\alpha = \beta = 1$ имеем:

$$U^{(e)}(x) = \frac{[B^2/4 - S(S+1)]\text{sn}^2(x) - 2B(S+1/2)\text{cn}(x)}{1+\text{cn}^2(x)}. \quad (13)$$

Точные решения для этой модели получены в работах [2-4]. Приведём некоторые примеры для основного уровня энергии. В случае спина $S = \frac{1}{2}$ имеем следующее выражение: $E_0^{(e)} = \mp \frac{1}{2}B$. Для значения спина $S = 1$ получаем: $E_0^{(e)} = \mp \sqrt{B^2 + 1}$. При $S = \frac{3}{2}$ основной уровень энергии $E_0^{(e)} = -\frac{1}{2}B \mp \sqrt{B^2 + 3}$, а для $S = 2$ он равен $E_0^{(e)} = -2\sqrt{3 + B^2}$. Наконец, для $S = 5/2$ можем записать:

$$E_0^{(e)} = -\frac{1}{2}B + 4\sqrt{(7 + B^2)/3} \cos \left[\frac{1}{3} \arccos \frac{3^{3/2}B}{(7 + B^2)^{3/2}} + \frac{2}{3}\pi \right].$$

Для других значений S и возбуждённых состояний точные решения найдены в [4].

Разлагая эллиптический потенциал (13) в ряд по степеням x :

$$U^{(e)}(x) = c_0 + c_2x^2 + c_4x^4 + c_6x^6 + c_8x^8 + O(x^{10}),$$

$$\text{где } c_0 = -B(S+1/2), \quad c_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{B^2}{4} - S - S^2\right),$$

$$c_4 = \frac{1}{8}B(S+1/2), \quad c_6 = -\frac{1}{40}\left(\frac{B^2}{4} - S - S^2\right),$$

$$c_8 = -\frac{3}{640}B(S+1/2), \text{ и произведя преобразование}$$

$$x \rightarrow G^{-1/6}x \text{ с } G = \frac{1}{2}c_4, \text{ получаем уравнение Шредингера в виде}$$

$$\frac{d^2\psi_n}{dx^2} + \left[\frac{E_n^{(e)} - c_0}{2G^{1/3}} - \frac{c_2}{2G^{2/3}}x^2 - x^4 + \frac{c_6}{2G^{4/3}}x^6 + \frac{c_8}{2G^{5/3}}x^8 + \dots \right] \psi_n = 0.$$

Тогда,

$$\frac{E_n^{(e)} + c_0}{2G^{1/3}} = E_n - \frac{c_2}{40G^{4/3}} \langle x^6 \rangle_n - \frac{c_8}{G^{5/3}} \langle x^8 \rangle_n + \dots$$

В первом приближении, при отбрасывании поправочных членов, выводим соотношение

$$E_n^{(1)} = \frac{E_n^{(e)}}{2G^{1/3}} + 8G^{2/3}. \quad (14)$$

Относительная ошибка в первом приближении составляет

$$\delta_n^{(1)} \equiv \frac{E_n^{(1)} - E_n}{E_n - U_m} = \frac{c_6}{2G^{4/3}(E_n - U_m)} \langle x^6 \rangle_n.$$

Используя выражение для

$$\langle x^6 \rangle_n = \frac{8W^2 + 9E_n}{15} \langle x^2 \rangle_n - \frac{4W}{15}E_n + \frac{3}{10}, \text{ получаем,}$$

что

$$\delta_n^{(1)} = -\frac{c_6}{2G^{4/3}(E_n - U_m)} \times \left(\frac{8W^2 + 9E_n}{15} \langle x^2 \rangle_n - \frac{4W}{15}E_n + \frac{3}{10} \right).$$

Во втором приближении

$$E_n^{(2)} = \frac{E_n^{(e)}}{2G^{1/3}} + 8G^{2/3} + \frac{c_6}{2G^{4/3}} \langle x^6 \rangle_n + \frac{3}{2560G^{5/3}} \langle x^8 \rangle_n. \quad (15)$$

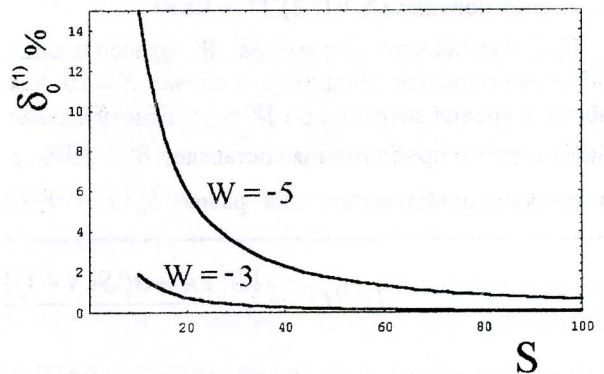


Рис. 3. Зависимость относительной ошибки первого приближения от спинового параметра S при расчёте основного уровня энергии смешанного осциллятора на основе эллиптической модели потенциала.

Приведём некоторые значения для относительной ошибки в первом и во втором приближении (в процентах). При $W = 5$: $\delta_0^{(1)} = -\frac{4.7}{(S+1/2)^{4/3}}$, а

$$\delta_0^{(2)} = -\frac{0.3}{(S+1/2)^{8/3}}. \text{ При } W = 2: \delta_0^{(1)} = -\frac{9}{(S+\frac{1}{2})^{4/3}},$$

$$\delta_0^{(2)} = -\frac{0.5}{(S+\frac{1}{2})^{8/3}}. \text{ При } W = -1: \delta_0^{(1)} = -\frac{13}{(S+\frac{1}{2})^{4/3}},$$

$$\delta_0^{(2)} = -\frac{2.5}{(S+\frac{1}{2})^{8/3}}. \text{ При } W = -3: \delta_0^{(1)} = \frac{40}{(S+1/2)^{4/3}},$$

$$\delta_0^{(2)} = -\frac{60}{(S+\frac{1}{2})^{8/3}}. \text{ При } W = -5: \delta_0^{(1)} = \frac{300}{(S+1/2)^{4/3}},$$

$$\delta_0^{(2)} = -\frac{1500}{(S+1/2)^{8/3}}.$$

На рис. 3 показаны относительные ошибки первого приближения для основного уровня энергии в зависимости от спина S при $W = -3$ и $W = -5$.

Если сравнивать степень точности аппроксимации смешанного потенциала с помощью двух рассмотренных выше моделей, то можно заметить, что эллиптический потенциал во всех случаях даёт более точное приближение.

В заключение ещё раз подчеркнем, что важное значение имеет и обратная сторона связи спиновых систем с моделью смешанного осциллятора [6]. В связи с этим представляет особый интерес осциллирующий характер поведения величины $\frac{\partial^2 E}{\partial W^2}$ в чётных возбуждённых состояниях в случае смешанного по-

тенциала (3), что, однако, выходит за рамки данного сообщения и должно быть предметом отдельного рассмотрения.

Авторы благодарны О.Б. Заславскому за обсуждение результатов работы.

1. Ю.В. Василевская, В.В. Ульянов, *Вестник ХГУ*, **440**, сер. "Физика", в. 3, 7 (1999).
2. V.V. Ulyanov, O.B. Zaslavskii, *Phys. Rep.*, **216**, 179 (1992).
3. В.В. Ульянов, О.Б. Заславский, Ю.В. Василевская, *ФНТ*, **23**, 110 (1997).
4. Ю.В. Василевская, *Точно решаемые квантовые потенциальные модели спинового и солитонного происхождения*, Кандидатская диссертация, ХГУ, Харьков, (1998).
5. В.В. Ульянов, *Задачи по квантовой механике и квантовой статистике*, Вища школа, Харьков (1980).
6. О.Б. Заславский, В.В. Ульянов, В.М. Цукерник, *ФНТ*, **9**, 511 (1983).

On the theory of quantum anharmonic oscillators. II

Yu.V. Vasilevskaya, V.V. Ulyanov

New method of a calculation of energy levels for a mixed (second-fourth power) potential by using of exact solutions for spin systems is proposed.

К теории квантовых ангармонических осцилляторов.

III. Осцилляционные явления в энергетических спектрах

Ю.В. Василевская, В.В. Ульянов

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина

Украина, 61077, г. Харьков, пл. Свободы, 4

E-mail: Vladimir.V.Ulyanov@univer.kharkov.ua

Обнаружены осцилляционные явления в энергетических спектрах некоторых ангармонических осцилляторов. Объясняются осцилляционные эффекты в поведении восприимчивости спиновых систем в магнитном поле.

Знайдені осциляційні явища в енергетичних спектрах деяких ангармонічних осциляторів. З'ясовуються осциляційні ефекти в поведінці сприйнятливості спинових систем у магнітному полі.

PACS: 03.65.-w

Как уже отмечалось в ряде наших работ [1-3], между энергетическими спектрами спиновой системы с гамильтонианом $\hat{H} = -\hat{S}_x^2 - B\hat{S}_z$, квантовой частицы с квадратичным законом дисперсии, движущейся в одномерном потенциальном поле

$$U(x) = \frac{B^2}{4} \operatorname{sh}^2(x) - B\left(S + \frac{1}{2}\right) \operatorname{ch}(x), \text{ а также анало-}$$

гичной частицы в поле $U(x) = x^4 + Wx^2$ существует тесная связь (обозначения и смысл используемых параметров, а также выбор безразмерных величин соответствуют предыдущим частям [2-3] нашей работы о квантовых ангармонических осцилляторах). Между первыми двумя системами имеется строгое точное соотношение энергетических спектров, а между парой последних существует приближенное соответствие с предельным переходом к точному при больших значениях спинового параметра S , что дает возможность приближенно описывать как спиновую систему, так и соответствующий ангармонический смешанный осциллятор [4-7].

Обнаруженные нами осцилляционные явления в спиновых системах, как уже отмечалось в [1], фактически были установлены вначале при исследовании

смешанного квадратично-четверного ангармонического осциллятора $U(x) = x^4 + Wx^2$. Некоторые особенности поведения энергетического спектра последнего и будут служить предметом обсуждения в данной работе.

Не останавливаясь на деталях расчетов, перейдем к изложению результатов с иллюстрацией на представленных графиках. Во-первых, общую картину поведения энергетических уровней E_n в данном потенциальном поле в зависимости от параметра W , входящего в потенциал, даёт серия картинок (рис. 1) профилей потенциала с указанием некоторых низлежащих уровней энергии.

Так, при $W > 0$ имеется одиночная потенциальная яма с минимумом второго порядка, которая при $W \gg 1$ фактически сводится к квадратичному потенциалу гармонического осциллятора с небольшой добавкой ангармонизма в виде члена x^4 , так что энергетический спектр оказывается близким к эквидистантному $E_n = \sqrt{W}(n+1/2) + O(W^{-3/2})$. При $W = 0$ имеем чисто четверной потенциал $U(x) = x^4$ с характерным неэквидистантным спектром. Наконец, при $W < 0$ потенциальная энергия имеет вид двойной

ямы, а уровни энергии, попадающие в энергетический диапазон от U_{\min} до $U=0$ (кроме находящихся в некоторой критической области энергий вблизи максимума барьера), попарно, в силу туннельного расщепления, вновь располагаются почти эквидистантно. Таким образом, при изменении параметра W

от больших положительных значений к большим по абсолютной величине отрицательным значениям происходит перестройка энергетического спектра от глобальной эквидистантности к локальной.

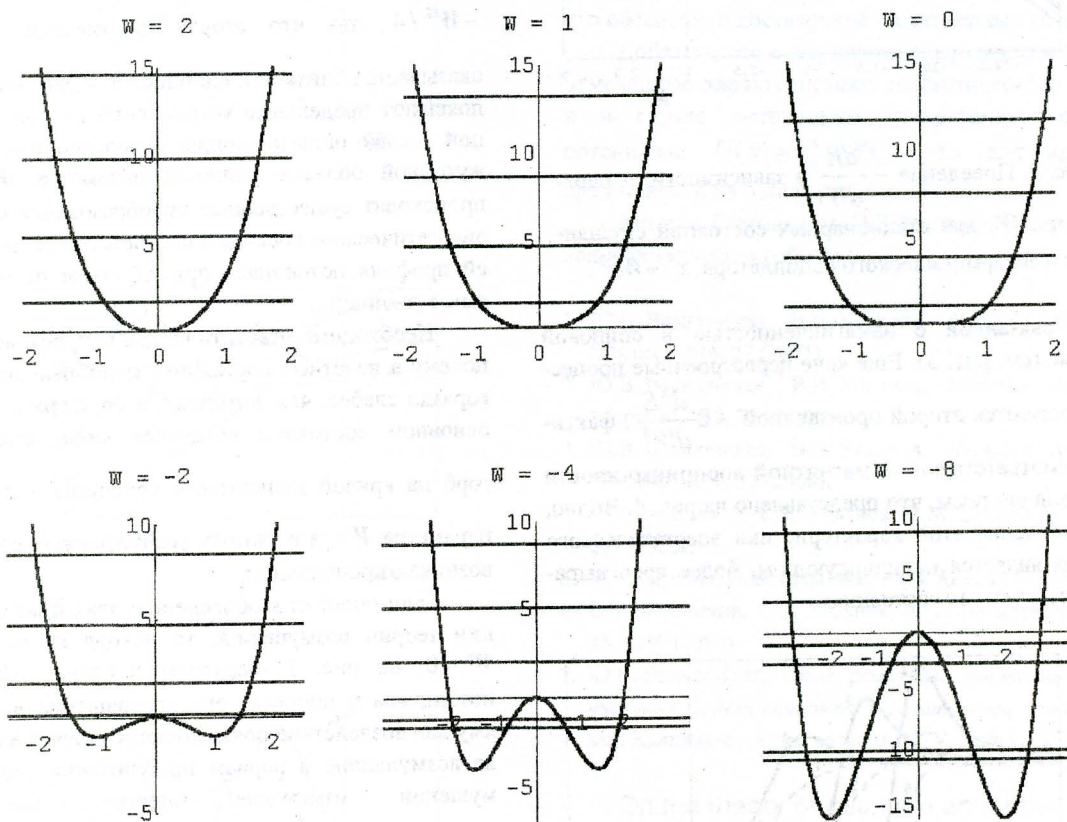


Рис. 1. Формы потенциальной энергии и расположение уровней энергии основного и некоторых возбужденных состояний смешанного ангармонического осциллятора $X^4 + WX^2$ в зависимости от параметра W .

Промежуточной области значений этого параметра $|W| \leq 1$ как раз и отвечают наиболее интересные особенности поведения спектра энергии, что отражено на графиках рис. 2, где сплошными линиями показаны деформации уровней энергии четных стационарных состояний, а штриховыми — нечетных. Можно заметить, что в перестроечном диапазоне значений параметра W нечетные уровни энергии изменяются плавно, тогда как у четных заметны достаточно резкие изменения кривизны. Эта тонкость поведения уровней энергии наглядно отражена на графиках зависимости первой производной $-\frac{dE}{dW}$,

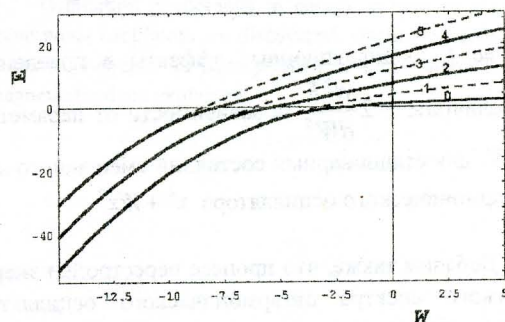


Рис. 2. Уровни энергии основного и некоторых возбужденных состояний смешанного ангармонического осциллятора $X^4 + WX^2$ в зависимости от параметра W .

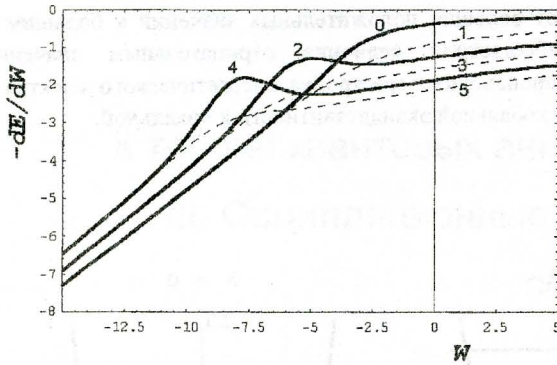


Рис. 3. Поведение $-\frac{d^2E}{dW^2}$ в зависимости от параметра W для стационарных состояний смешанного ангармонического осциллятора $x^4 + Wx^2$.

тесно связанной с намагниченностью в спиновой системе (см. рис. 3). Еще ярче перестроенные процессы передаются второй производной $-2\frac{d^2E}{dW^2}$, фактически соответствующей магнитной восприимчивости спиновой системы, что представлено на рис. 4. Видно, что поведение этой характеристики энергетического спектра является осциллирующим, более ярко выраженным в четных состояниях.

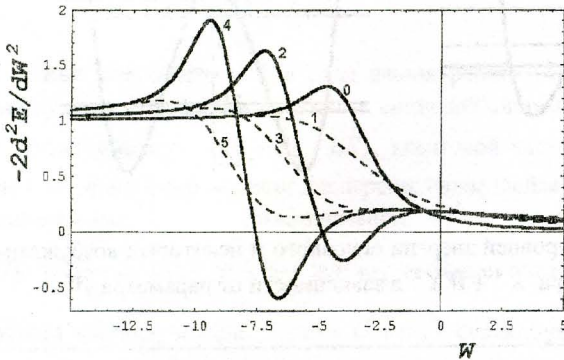


Рис. 4. Осцилляционные эффекты в поведении величины $-2\frac{d^2E}{dW^2}$ в зависимости от параметра W для стационарных состояний смешанного ангармонического осциллятора $x^4 + Wx^2$.

Добавим также, что процесс перестройки энергетического спектра ангармонического осциллятора можно проследить, рассматривая поведение всего массива уровней энергии в целом при переходе от глобальной эквидистантности к локальной. При больших положительных значениях параметра W минимум потенциала фиксирован, так что общего смещения уровней энергии нет — глобальная эквиди-

стантность, каждый уровень энергии пропорционален квадратному корню из W , что приводит к убыванию второй производной $-2\frac{d^2E}{dW^2}$. При больших отрицательных значениях параметра W локальный минимум каждой из двух ямок, на которые разбивается потенциал, изменяется по закону (ямка углубляется) $-W^2/4$, так что вторая производная $-2\frac{d^2E}{dW^2}$ оказывается близкой к единице. Эти два соображения поясняют предельные устремления второй производной, однако остается вопрос о поведении ее в промежуточной области значений параметра W , где и происходят существенные преобразования структуры энергетического спектра в соответствии с деформацией профиля потенциала при переходе от одинарной ямы к двойной.

Необходимо ответить на два вопроса: во-первых, почему в нечетных состояниях подобные осцилляции гораздо слабее, чем в четных, а во-вторых, почему в основном состоянии возникает лишь характерный горб на кривой зависимости величины $-2\frac{d^2E}{dW^2}$ от параметра W , а в четных возбужденных состояниях возникают осцилляции.

Если подойти к объяснению этих фактов с позиции теории возмущений, то исходя из ситуации с $W=0$ на рис. 1, получаем влияние деформации потенциала в процессе его превращения в двойную яму как воздействие появляющегося барьера в качестве возмущения: в первом приближении теории возмущений изменение энергии при этом $\Delta E_n = \langle \delta U \rangle_n = \int \delta U(x) |\psi_n(x)|^2 dx$. Поскольку волновые функции основного и четных возбужденных состояний не имеют узлов при $x=0$, эти состояния будут испытывать весьма сильное влияние возмущения, тогда как для нечетных состояний, волновые функции которых имеют один из узлов как раз при $x=0$, влияние такого возмущения будет менее существенным.

Далее необходимо пояснить, почему именно четные возбужденные состояния испытывают большую деформацию, чем основное. С той же точки зрения теории возмущений, возбужденные состояния начинают испытывать влияние барьера-возмущения тогда, когда он уже полностью сформировался, т. е. в условиях достаточно сильного возмущения (область изменений относится к большим $|W|$), тогда как основное состояние начинает подвергаться воздействию барьера, когда он еще достаточно слаб, что дает для этого состояния лишь горб, а не осцилляции. Количественно же данные качественные рассуждения подтверждаются аналитическими вычислениями с

учёт туннельного расщепления уровней энергии, которые мы здесь приводить не станем.

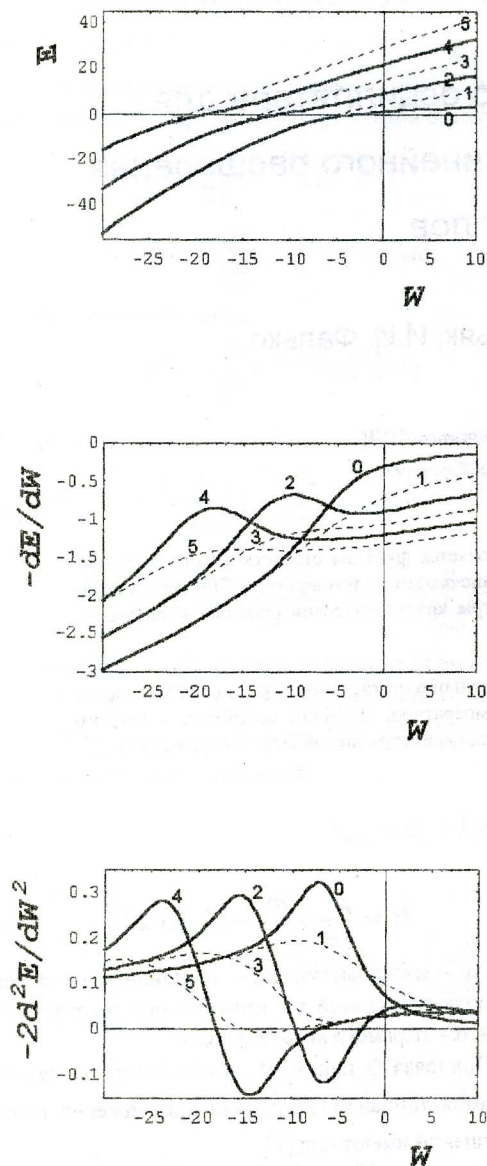


Рис. 5. Зависимость уровней энергии E , а также величин $-\frac{dE}{dW}$ и $-2\frac{d^2E}{dW^2}$ от параметра W для стационарных состояний смешанного ангармонического осциллятора $x^6 + Wx^2$.

При построении графиков, представленных на рисунках, нами использован численный расчёт собственных значений энергии смешанных осцилляторов на основе метода усеченной матрицы их гамильтонианов в представлении некоторого гармонического осциллятора. При этом для описываемых низколежащих уровней энергии рассматривалась матрица 30×30 , что обеспечило достаточное число верных знаков.

Добавим, что совершенно аналогично ведут себя отмеченные характеристики энергетического спектра и в случае смешанного квадратично-шестерного потенциала $U(x) = x^6 + Wx^2$, что для краткости представлено на одном рис. 5.

Авторы благодарны О.Б.Заславскому за обсуждение результатов работы.

1. Ю.В. Василевская, В.В. Ульянов, *Вестник ХГУ, сер. "Физика"* **516**, 27 (2001).
2. Ю.В. Василевская, В.В. Ульянов, *Вестник ХГУ сер. "Физика"*, **440**, 7 (1999).
3. Ю.В. Василевская, В.В. Ульянов, *Вестник ХГУ сер. "Физика"*, **476**, 37 (2000).
4. О.Б. Заславский, В.В. Ульянов, В.М. Цукерник, *ФНТ*, **9**, 511 (1983).
5. V.V. Ulyanov, O.B. Zaslavskii, *Phys. Rep.*, **216**, 179 (1992).
6. О.Б. Заславский, В.В. Ульянов, Ю.В. Василевская, *ФНТ*, **23**, 1289 (1997).
7. Ю.В. Василевская, *Точно решаемые квантовые потенциальные модели спинового и солитонного происхождения*, Кандидатская диссертация, ХГУ, Харьков (1998).

On the theory of quantum anharmonic oscillators. III. Oscillation phenomena in energy spectra

Yu.V. Vasilevskaya, V.V. Ulyanov

Oscillation phenomena in energy spectra of some anharmonic oscillators are discovered. Oscillation effects in the behaviour of the susceptibility of spin systems in a magnetic field are explained.

Осцилляции магнитной восприимчивости в спиновых системах

Ю.В. Василевская, В.В. Ульянов

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина,

Украина, 61077, г. Харьков, пл. Свободы, 4

E-mail: Vladimir.V.Ulyanov@univer.kharkov.ua

Обнаружены осцилляционные явления в поведении восприимчивости некоторых спиновых систем в магнитном поле.

Знайдені осциляційні явища в поведінці сприйнятливості деяких спінових систем у магнітному полі.

PACS: 03.65.-w

В ряде работ [1, 2] с участием одного из авторов данной статьи при исследовании свойств спиновых систем типа легкоосного парамагнетика в поперечном магнитном поле B_x , которые описываются гамильтонианом

$$H = -S_z^2 - B_x S_x \quad (1)$$

с собственными значениями E_n , где S_k – операторы проекций спина, были обнаружены особенности в поведении магнитной восприимчивости

$$\chi = -2 \frac{\partial^2 E}{\partial B_x^2} \quad (2)$$

основного состояния ($n=0$) в виде характерного всплеска-горба (рис. 1). Отметим, что все обозначения и выбор безразмерных переменных соответствуют работам [1, 2]. В то же время в первом возбужденном состоянии (рис. 1) восприимчивость такой особенности не имеет: есть лишь очень слабый максимум [3, 4].

Оказалось, что во втором и в других четных возбужденных состояниях магнитная восприимчивость (2) спиновых систем (1) обладает особенностями в виде ярко выраженных осцилляций (рис. 2), тогда как в нечетных состояниях подобные осцилляции имеют гораздо меньшую амплитуду (рис. 3).

Данный осцилляционный эффект был обнаружен нами случайно при изучении свойств энергетического спектра квантовых ангармонических осцилляторов [5,6], а в силу тесной связи рассматриваемых спино-

вых систем с подобными осцилляторами (так называемое спин-координатное соответствие и метод эффективных потенциалов [1,2]) можно было ожидать аналогичных осцилляций и в спиновых системах, что и подтвердилось в дальнейшем.

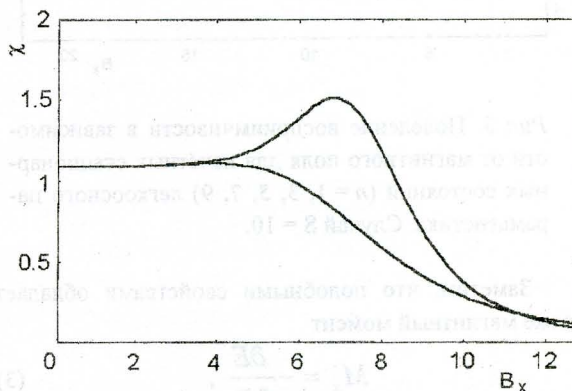


Рис. 1. Типичная зависимость восприимчивости легкоосного парамагнетика от магнитного поля в основном состоянии (верхняя кривая) и первом возбужденном (нижняя кривая). Случай $S = 6$.

Результаты были получены на основе сочетания аналитических, численных и графических методов исследования, разработанных авторами ранее при изучении различных физических характеристик рас-

смаатриваемых спиновых систем, а дополнительная проверка осуществлялась с помощью точных решений задачи на собственные значения (1), существующих при $S \leq 7/2$.

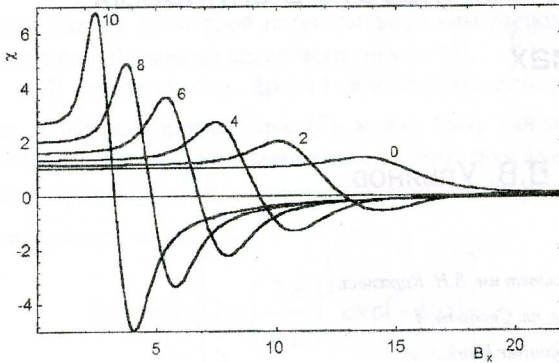


Рис. 2. Поведение восприимчивости в зависимости от магнитного поля для чётных стационарных состояний ($n = 0, 2, 4, 6, 8, 10$) легкоосного парамагнетика. Случай $S = 10$.

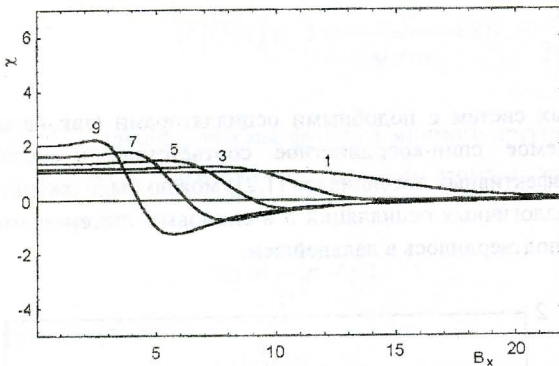


Рис. 3. Поведение восприимчивости в зависимости от магнитного поля для нечётных стационарных состояний ($n = 1, 3, 5, 7, 9$) легкоосного парамагнетика. Случай $S = 10$.

Заметим, что подобными свойствами обладает также магнитный момент

$$M_x = -\frac{\partial E}{\partial B_x}, \quad (3)$$

где соответствующие особенности возбуждённых состояний проявляются в немономонном поведении момента с увеличением магнитного поля (см. рис. 4-5).

Детальное рассмотрение характера найденных осцилляций показывает, что с увеличением номера возбуждённого состояния амплитуда осцилляций магнитной восприимчивости возрастает, а область магнитных полей, при которых наблюдаются всплески восприимчивости, смещается в сторону меньших

значений B_x , что усматривается из графиков на рис. 2. С увеличением значения спинного параметра S осцилляции сохраняются, амплитуда их несколько уменьшается, а область осцилляций смещается в сторону больших значений магнитного поля. Некоторые из этих особенностей осцилляционного поведения магнитной восприимчивости отражены на графиках, представленных на рис. 6.

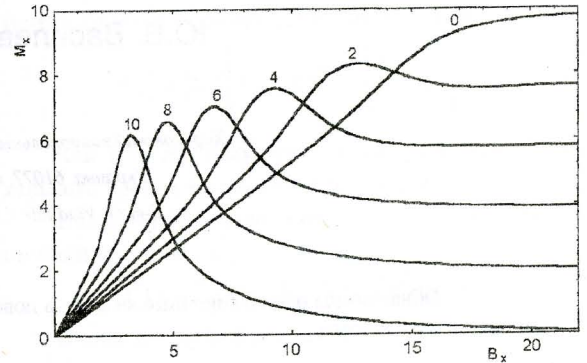


Рис. 4. Зависимость магнитного момента от магнитного поля для чётных стационарных состояний ($n = 0, 2, 4, 6, 8, 10$) легкоосного парамагнетика. Случай $S = 10$.

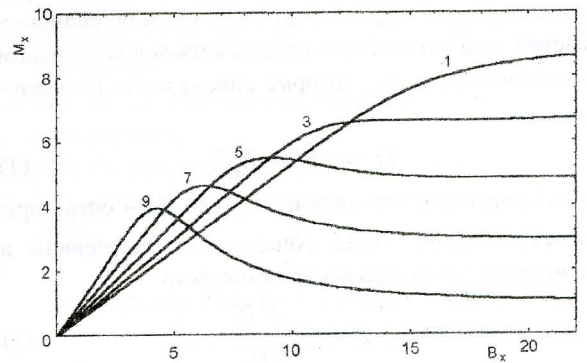


Рис. 5. Зависимость магнитного момента от магнитного поля для нечётных стационарных состояний ($n = 1, 3, 5, 7, 9$) легкоосного парамагнетика. Случай $S = 10$.

Добавим, что обнаруженные осцилляционные эффекты появляются в указанных спиновых системах при значениях спина $S \geq 5/2$.

Отметим также, что в соответствующем случае двухосного парамагнетика, помещённого в магнитное поле, перпендикулярное осям анизотропии, т. е. в спиновой системе с гамильтонианом

$$H = \alpha S_e^2 - \beta S_z^2 - B_x S_x, \quad (4)$$

наблюдаются аналогичные явления при разных соотношениях между константами анизотропии $\alpha, \beta > 0$.

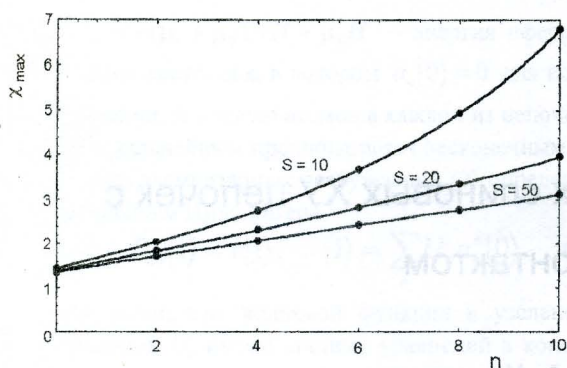


Рис. 6. Значения максимумов всплесков магнитной восприимчивости в зависимости от номера стационарных состояний для легкоосных парамагнетиков при разных значениях спина S .

Объяснение происхождения указанных осцилляционных особенностей поведения магнитного момента и восприимчивости в спиновых системах основывается на упомянутой связи спиновых систем с квантовыми осцилляторами. Это, как мы надеемся, будет предметом отдельного, более детального рассмотрения при изложении наших результатов по исследованию соответствующих свойств энергетического спектра ангармонических осцилляторов.

Авторы благодарны О.Б. Заславскому за обсуждение результатов работы.

1. О.Б. Заславский, В.В. Ульянов, В.М. Цукерник, *ФНТ*, **9**, 511 (1983).
2. V.V. Ulyanov, O.B. Zaslavskii, *Phys. Rep.*, **216**, 179 (1992).
3. О.Б. Заславский, В.В. Ульянов, Ю.В. Василевская, *ФНТ*, **23**, 1289 (1997).
4. Ю.В. Василевская, *Точно решаемые квантовые потенциальные модели спинного и солитонного происхождения*, Кандидатская диссертация, ХГУ, Харьков (1998).
5. Ю.В. Василевская, В.В. Ульянов, *Вестник ХГУ*, **440**, сер. "Физика", 7 (1999).
6. Ю.В. Василевская, В.В. Ульянов, *Вестник ХНУ*, **476**, сер. "Физика", 37 (2000).

Oscillations of the magnetic susceptibility in spin systems

Yu.V. Vasilevskaya, V.V. Ulyanov

Oscillation phenomena in the behaviour of the susceptibility of some spin systems in a magnetic field are discovered.

Туннельное расщепление энергии в несимметричных случаях

В.В. Ульянов

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина

Украина, 61077, г. Харьков, пл. Свободы, 4

E-mail: Vladimir.V.Ulyanov@univer.kharkov.ua

Рассматривается туннельное расщепление уровней энергии в несимметричных потенциальных полях.

Розглядається тунельне розщеплення рівнів енергії в несиметричних потенціальних полях.

PACS: 03.65.-w, 73.40.Gk

Вводные замечания

В данной работе речь идет об интересном квантовом явлении туннельного расщепления энергии в несимметричных потенциальных полях. Обычно рассматривают симметричный случай двух одинаковых потенциальных ям, разделяемых некоторым симметричным барьером [1]. Однако расщепление из-за туннелирования происходит и в несимметричных случаях.

Физическим объяснением расщепления во всех случаях является туннелирование в сочетании с невырожденностью одномерного энергетического спектра связанных состояний, однако причины появления энергетической щели оказываются различными. Если в первом случае совпадение уровней энергии в изолированных ямках происходит из-за симметрии и касается всех подбарьерных энергий, то в несимметричном случае оно обязано спорадическому наложению некоторой пары уровней энергии в различных ямках, что можно проследить в деталях на конкретных примерах в процессе деформации, например, одной из частей потенциала (или профиля потенциальной энергии в целом). При этом возникает своеобразный эстафетный обмен уровнями энергии в ямках. К тому же для каждой пары в симметричном случае мы имеем дело с фиксированной щелью, тогда как в несимметричном щель может иметь разные размеры вплоть до некоторой минимальной (как и во всех случаях "отталкивания" уровней энергетических

"термов" при учете возмущений, снимающих формальное двукратное вырождение; в рассматриваемых случаях таким возмущением является туннелирование).

Таким образом, предметом изучения является один из наиболее ярких чисто квантовых эффектов - расщепление уровней энергии за счет другого чисто квантового эффекта - туннелирования. На фоне еще одного также чисто квантового эффекта - дискретной структуры уровней энергии.

Обсуждаемая ситуация возникает во многих физических системах, в частности в наноструктурных образованиях.

Описать подобные явления помогают аналитические исследования с помощью соотношений, полученных автором в работе [2] на основе квазиклассических методов (здесь оказывается возможным подключение и второго квазиклассического приближения), а также численные и графические методы.

В работе рассматриваются конкретные примеры туннельного расщепления в различных потенциальных полях, включая встречающиеся в теории квазирешаемых моделей спинного происхождения [3], а также в теории солитонов [4]. Изучены различные случаи расщепления энергии и выведены соответствующие формулы для несимметричных потенциалов, а также обобщены известные результаты для симметричных полей. Замечу, что мы ограничиваемся рассмотрением только двухъямных потенциалов.

В первом разделе работы мы ограничимся качественными замечаниями относительно особенностей туннельного расщепления в симметричных случаях, перенеся все количественные результаты, а также общее исследование несимметричных случаев во второй раздел.

1. Симметричные потенциалы

На рис. 1 показаны некоторые профили подобных симметричных потенциальных полей с условным

выделением некоторой пары уровней, образовавшейся за счет расщепления.

Эти потенциалы имеют различное происхождение: кусочно-постоянные модели (прямоугольные) рис. 1а, степенные куполы, зажатые в непроницаемых границах рис. 1б-с, кусочно-линейные рис. 1д, кусочно-квадратичные рис. 1е, степенные (квадратично-четверные) рис. 1ф, гиперболические (квантиточно-решаемые модели спиновой природы) рис. 1г, локализованные потенциалы солитонного происхождения рис. 1h.

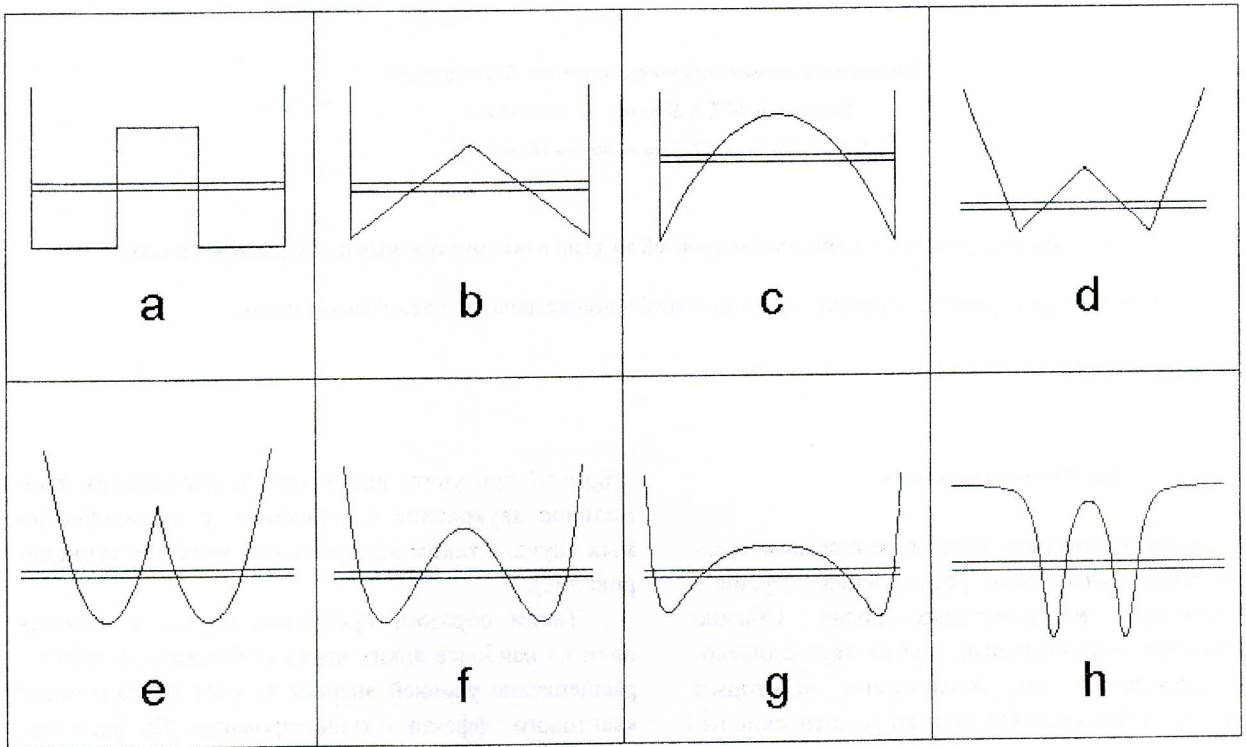


Рис. 1. Некоторые симметричные потенциальные модели: а – прямоугольная, б – линейная с непроницаемыми стенками, с – квадратичная с непроницаемыми стенками, д – кусочно-линейная, е – кусочно-квадратичная, ф – квадратично-четверная, г – гиперболическая, h – солитонная.

Почти все выбранные модели потенциалов, изображенные на рис. 1, допускают достаточно простое аналитическое решение уравнения Шредингера с волновыми функциями в явном виде и с уровнями энергии, получаемыми из точных соотношений в виде корней некоторого уравнения. Исключением является квадратично-четверной профиль (рис. 1ф). Солитонный случай (рис. 1h) занимает особое положение: там уровни энергии можно задавать точно, по своему усмотрению. Это позволяет оценивать эффективность получаемых формул для энергетических щелей. К тому же в каждом случае имеется возможность непосредственного численного расчета уровней энергии.

Для расчета энергетических щелей в случае симметричных потенциалов часто пользуются формулой,

приведенной в [1], которую будем в дальнейшем называть формулой Ландау:

$$\Delta E = \frac{\hbar \omega_{\text{кл}}}{\pi} \exp \left(- \int_{x_2}^{x_3} |k| dx \right), \quad (1)$$

где классическая циклическая частота колебаний частицы в отдельной ямке $\omega_{\text{кл}}$, волновое число k и пределы интеграла в виде прибарьерных классических точек поворота x_2 и x_3 зависят от полной энергии частицы E , расщеплением которой интересуются.

Эта формула достаточно хорошо описывает расщепление уровней энергии в случае слабой прозрачности и плавного поведения потенциального барьера, разделяющего ямки, однако в ряде случаев требуется внесение существенных поправок. Вывод же формулы

(1.1), приведенный в [1], не дает возможности провести ее уточнения и обобщения. Наиболее адекватным представляется подход, сочетающий квазиклассическое решение с точным вблизи особенностей потенциала [2]. Тем самым удастся не только наглядно истолковать все входящие в результирующие формулы величины, но и получить дальнейшие уточнения, что позволяет также дать оценки точности результатов.

Результаты подобных уточнений, подробности вывода которых будут изложены во второй части работы, сводятся к следующему.

Во-первых, экспоненциальный множитель должен быть заменен при слабой прозрачности барьера корнем квадратным из коэффициента прозрачности барьера \sqrt{T} . В большинстве случаев такая величина действительно сводится в первом квазиклассическом приближении к фигурирующей в формуле (1.1) экспоненте, однако для некоторых барьеров может оказаться весьма существенным теряемый при этом предэкспоненциальный множитель. К тому же, учет второго квазиклассического приближения при расчете коэффициента прозрачности вносит дополнительные поправки в экспоненте.

Во-вторых, классическая частота $\omega_{\text{кл}}$ должна быть заменена величиной $\frac{2\pi}{\tau}$, где τ является квантовым обобщением классического периода колебаний (к последнему прибавляются некоторые добавочные квантовые члены [2]).

Таким образом, с учетом указанных изменений формула для энергетических щелей приобретает следующий вид:

$$\Delta E = \frac{2\sqrt{T}}{\tau}. \quad (2)$$

Чтобы оценить точность формулы (2), при расчете энергетических спектров выбранных моделей потенциалов можно использовать следующие методы в соответствующих ситуациях: точные решения уравнения Шредингера на основе тригонометрических функций (рис. 1а), функций Эйри (рис. 1б, д) или функций параболического цилиндра (рис. 1с, е) с последующими численными расчетами, численные решения уравнения Шредингера для данной потенциальной конфигурации (рис. 1а-г), метод численного расчета собственных значений матрицы спинового гамильтониана (рис. 1г), метод усеченной матрицы гамильтониана (рис. 1с, ф) (в представлении гармонического осциллятора или бесконечной прямоугольной ямы).

Все симметричные модели, представленные на рис. 1, допускают простые деформации, приводящие к несимметричным потенциалам. Так, модель с прямо-

угольным барьером (рис. 1а) можно видоизменить либо углубляя одну из ямок, либо расширяя ее. Аналогичным образом трансформируются и другие модели. Таким образом, получаем весьма разнообразное множество простых профилей потенциалов для дальнейшего изучения туннельного расщепления в несимметричных ситуациях, которое предполагается рассмотреть во второй части работы.

2. Несимметричные потенциалы

На рис. 2 показаны некоторые профили подобных несимметричных потенциальных полей с условным выделением некоторой пары уровней, образовавшейся за счет расщепления в определенной ситуации деформирования данного потенциала, а также с указанием уровня энергии основного состояния, фактически локализованного в одной из ямок.

В работе не ставится цель подробного изучения каждой из приведенных моделей, как и других аналогичных. Для иллюстрации общей ситуации будут выбраны отдельные примеры.

Начнем же с описания структуры энергетического спектра для произвольной формы двухъямной потенциальной энергии. Связь квазиклассической волновой функции в отдельных ямках удобно осуществить методом матрицы связи локальных решений (трансфер-матрицы, или оператора перехода через потенциальный барьер), матричные элементы которой представляются через свои модули $|G_{21}|$, $|G_{22}|$ и фазовые добавки φ_{21} и φ_{22} [2].

В результате (подробности см. в подразделе "Структура спектра в потенциальной яме с внутренней особенностью" сборника статей [2]) приходим к общему уравнению для уровней энергии, из которого вытекают как поведение отдельных ветвей энергетического спектра, так и выражение для энергетической щели при сближении "термов":

$$\cos(S_1 + S_2 - \varphi_{22}) = -\frac{|G_{21}|}{|G_{22}|} \cos(S_1 - S_2), \quad (3)$$

где величины

$$S_1 = \int_1 k dx - \alpha_1 + \frac{1}{2} \varphi_{21} + O(\hbar)$$

$$\text{и } S_2 = \int_2 k dx - \alpha_2 + \frac{1}{2} (\pi - \varphi_{21}) + O(\hbar)$$

содержат так называемые граничные фазы α_1 и α_2 , учитывающие особенности поведения потенциала вблизи внебарьерных классических точек поворота [2], индексы 1 и 2 нумеруют ямки, а квантовые добавки $O(\hbar)$ пока явно не выписываются, чтобы не загромождать формул, но они фактически получены в [2].

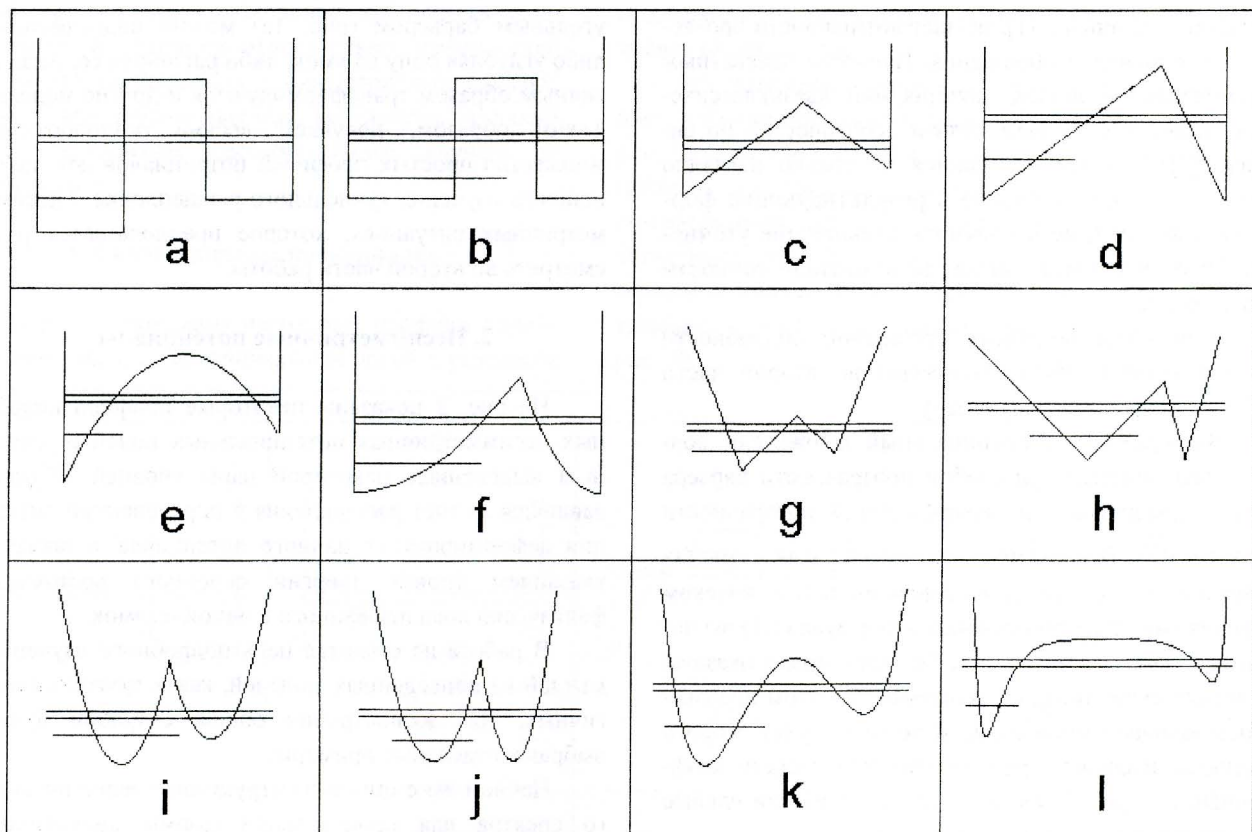


Рис. 2. Некоторые несимметричные потенциальные модели: а и б – прямоугольные, с и d – линейные с непроницаемыми стенками, е и f – квадратичные с непроницаемыми стенками, g и h – кусочно-линейные, i и j – кусочно-квадратичные, k – квадратично-кубично-четвертая, l – гиперболическая.

Входящее в правую часть (3) отношение модулей матричных элементов согласно [2] равно корню квадратному из коэффициента отражения \sqrt{R} . Для описания туннельного расщепления целесообразно преобразовать эту формулу к виду

$$\cos(S_1 - \frac{1}{2}\varphi_{22})\cos(S_2 - \frac{1}{2}\varphi_{22}) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{R})\cos(S_1 - S_2). \quad (4)$$

В условии пренебрежения возможностью туннелирования, т. е. при полном отражении $R=1$, получаем из (4) правила квантования энергий E_n и E_m для двух независимых ветвей энергетического спектра, отвечающих отдельным ямкам:

$S_1 - \frac{1}{2}\varphi_{22} = \pi(n + \frac{1}{2})$ и $S_1 - \frac{1}{2}\varphi_{22} = \pi(n + \frac{1}{2})$, в частности, при пересечении этих ветвей, т. е. при совпадающих энергиях $E_n = E_m = E^0$.

При выбранных ветвях спектра n и m имеем систему двух уравнений

$$\begin{aligned} S_1 - \frac{1}{2}\varphi_{22} &= \pi(n + \frac{1}{2}), \\ S_1^0 - \frac{1}{2}\varphi_{22}^0 &= \pi(n + \frac{1}{2}) \end{aligned} \quad (5)$$

для двух величин: E^0 и того значения параметра потенциала, при котором эти ветви пересекаются.

Полагая отличие от нерасщепленного значения энергии $\delta E = E - E^0$ малым и производя разложение обеих частей уравнения (4), с учетом малости прозрачности барьера $T \ll 1$, так что $1 - \sqrt{R} \approx T/2$, получаем выражение для полуширины щели (все величины относятся к значению энергии E^0 , однако специальных значков указывать не будем)

$$\delta E = \pm \hbar \sqrt{\frac{T}{\tau_1 \tau_2}}. \quad (6)$$

Отсюда для энергетической щели $\Delta E = 2\delta E$ вытекает формула

$$\Delta E = 2\hbar \sqrt{\frac{T}{\tau_1 \tau_2}}, \quad (7)$$

в которой величины

$$\tau_1 = \int_1 k dx - \hbar \frac{d\varphi_{22}}{dE} + \hbar \frac{d\varphi_{21}}{dE} + O(\hbar^2) \quad (8)$$

и

$$\tau_1 = \tau_1^h - 2\hbar \frac{d\alpha_1}{dE} + \hbar \frac{d\varphi_{21}}{dE} - \hbar \frac{d\varphi_{22}}{dE} + O(\hbar^2)$$

являются обобщениями классических периодов колебаний в отдельных ямках (первые слагаемые) и содержат квантовые поправочные члены двойкой при-

роды. Фазовые поправки оказываются существенными, во-первых, в области энергий, близких к максимуму разделяющего ямки барьера (так называемый "критический" диапазон), компенсируя расходимости классического периода колебаний при энергии, равной максимуму потенциала, а во-вторых, в случае скачкообразного поведения склонов барьера. Обычно же, вне критического диапазона, в условиях глубокого туннелирования фазы вообще не зависят от энергии и не дают вкладов в (8). Поправочные члены $O(\hbar^2)$ обозначим $\Delta\tau$ и приведем в явном виде:

$$\Delta\tau = \frac{5\hbar^2}{12m} \frac{d^4}{dE^4} \int \left(\frac{dU}{dx} \right)^2 p dx - \frac{\hbar^2}{4m} \frac{d^3}{dE^3} \int \frac{d^2 U}{dx^2} p dx + O(\hbar^6), \quad (9)$$

где m – масса частицы, движущейся в потенциальном поле $U(x)$, а $p = \sqrt{2m(E - U)}$ – ее импульс (индексы ямок не указываем). Заметим, что в случае плавных потенциалов члены в формуле (9) можно преобразовать к единому вкладу, а поправка $O(\hbar^4)$ фактически вычислена в [2]. Аналогичные квантовые поправки второго квазиклассического приближения получаются и в экспоненте у коэффициента прозрачности T плавного слабопроницаемого барьера.

Таким образом, именно формула (7) и обобщает результат (2) на несимметричный случай и переходит в (2) в случае симметрии, когда фаза $\varphi_{21} = \frac{\pi}{2}$ (см. [2]) и $\tau_1 = \tau_2 = \tau$.

Что касается подробного изучения туннельного расщепления энергии для конкретных потенциалов, то надеемся, что такой детальный анализ с численными оценками станет предметом отдельного сообщения.

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Наука, Москва (1989).
2. В.В. Ульянов, *О квазиклассическом движении частиц в полях с особенностями*, ХНУ, Харьков (2002).
3. V.V. Ulyanov, O.B. Zaslavskii, *Phys. Rep.*, **216**, 179 (1992).
4. Ю.В. Василевская, В.В. Ульянов, *Вестник ХГУ*, **417**, сер. "Физика", 9 (1998).

The tunnel splitting of energy levels in nonsymmetrical cases

V.V. Ulyanov

The tunnel splitting of energy levels in nonsymmetrical potentials is considered.

Туннельное расщепление энергии в несимметричных случаях. II

В.В. Ульянов

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина

Украина, 61077, г. Харьков, пл. Свободы, 4

E-mail: Vladimir.V.Ulyanov@univer.kharkov.ua

Рассматривается туннельное расщепление уровней энергии в несимметричных потенциальных полях.

Розглядається тунельне розщеплення рівнів енергії в несиметричних потенціальних полях.

PACS: 03.65.-w, 73.40.Gk

Как и предполагалось в первой части [1] данной работы, продолжение ее посвящается подробному изучению туннельного расщепления энергии для конкретных потенциалов с численными оценками.

Вначале будут рассмотрены некоторые симметричные модели потенциальных полей. Напомним, что нашей задачей является исследование тонкого квантового эффекта расщепления уровней энергии в условиях двухъямных потенциалов.

Описать подобные явления помогают аналитические исследования с помощью соотношений, полученных автором в работе [2] на основе квазиклассических методов (здесь оказывается возможным подключение и второго квазиклассического приближения) в сочетании с точными решениями в окрестности особенностей потенциала, а также численные и графические методы. Так, среднее положение расщепляемых уровней энергии E_n определяется правилами квантования вида

$$\int k dx + \frac{5\hbar^2}{24m} \frac{d^3}{dE^3} \int \left(\frac{dU}{dx} \right)^2 k dx - \frac{\hbar^2}{4m} \frac{d^2}{dE^2} \int \frac{d^2 U}{dx^2} k dx + O(\hbar^4) =$$
(1)

$$= \pi \left(n + \frac{1}{2} \right) + \alpha_1 + \frac{1}{2} \varphi_{22} - \frac{1}{2} \varphi_{21}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

$$k = \sqrt{2m(E - U)/\hbar^2},$$

где интегрирование ведется между классическими точками поворота отдельной ямки, граничная фаза α учитывает поведение потенциала $U(x)$ вблизи внебарьерной точки поворота, а фазовые величины φ_{21} и φ_{22} определяются структурой барьера (в случае симметричного барьера $\varphi_{21} = \frac{\pi}{2}$).

Главный же результат – величина расщепления ΔE энергетических уровней – описывается выведенной в первой части [1] работы универсальной формулой

$$\Delta E = \frac{2\sqrt{T}}{\tau}, \quad (2)$$

в которой T есть коэффициент прозрачности барьера (если \sqrt{T} не очень мал, то его следует заменить $\arcsin(\sqrt{T})$), а величина τ является квантовым обобщением [2] классического периода колебаний в отдельной яме:

$$\tau = 2\hbar \frac{d}{dE} \left(\int k dx + \frac{5\hbar^2}{24m} \frac{d^3}{dE^3} \int \left(\frac{dU}{dx} \right)^2 k dx - \frac{\hbar^2}{4m} \frac{d^2}{dE^2} \int \frac{d^2 U}{dx^2} k dx - \alpha - \frac{1}{2} \varphi_{22} + \frac{1}{2} \varphi_{21} \right). \quad (3)$$

Заметим, что в соответствующую формулу первой части работы [1] вкралась опечатка.

3. Примеры симметричных моделей

Прямоугольный потенциал. Рассмотрение конкретных случаев начинаем с прямоугольной модели потенциала, изображенной на рис. 1.

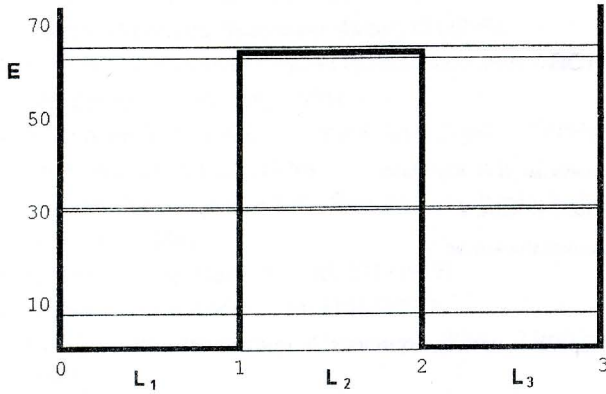


Рис. 1. Симметричный потенциал с прямоугольным барьером и непроницаемыми стенками.

Здесь и в дальнейшем будут использоваться безразмерные величины: в качестве единицы длины выбирается некоторое расстояние L , а энергетические характеристики будут измеряться в единицах энергии $\hbar^2/2mL^2$.

В полученной общей формуле для расщепления уровней энергии (2) коэффициент прозрачности прямоугольного барьера высотой U_0 и шириной L_2 известен [3]:

$$T = \frac{1}{1 + \frac{U_0^2}{4E(U_0 - E)} \operatorname{sh}^2(\sqrt{U_0 - E}L_2)} \quad \text{при } E < U_0.$$

В интересующем нас случае слабой прозрачности барьера, т. е. при $\sqrt{U_0 - E}L_2 \gg 1$,

$$T = 16 \frac{E(U_0 - E)}{U_0^2} \exp(-2\sqrt{U_0 - E}L_2). \quad (4)$$

Теперь обратимся к формуле для обобщенного периода колебаний (3). Здесь для непроницаемой границы [2] фаза $\alpha = \frac{\pi}{2}$, а несложный расчет для фазовой характеристики прямоугольного барьера дает следующее выражение:

$$\varphi_{22} = \arctg \left[\frac{U_0 - 2E}{2\sqrt{E(U_0 - E)}} \operatorname{th}(\sqrt{U_0 - E}L_2) \right],$$

в котором гиперболический тангенс можно для рассматриваемых условий заменить единицей, так что

получаем $\varphi_{22} = \frac{\pi}{2} - 2\arctg \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{U_0 - E}}$. Подставляя эти

выражения в (3), приходим к компактной формуле для обобщенного периода колебаний в отдельной ямке шириной L_1

$$\tau = \frac{\sqrt{E(U_0 - E)}}{\sqrt{U_0 - E}L_1 + 1} \quad (5)$$

и в соответствии с (4) и (2) к окончательному ответу для энергетических щелей

$$\Delta E_n = 8 \frac{E_n(U_0 - E_n)}{U_0} \frac{\exp(-\sqrt{U_0 - E_n}L_2)}{\sqrt{U_0 - E_n}L_1 + 1}, \quad (6)$$

где поправка в знаменателе в виде единицы существенно увеличивает точность, а средние положения расщепляемых уровней энергии E_n в соответствии с (1) удовлетворяют уравнению

$$\sqrt{E_n}L_1 = \pi(n+1) - \arctg \sqrt{\frac{E_n}{U_0 - E_n}}, \quad (7)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

Здесь при $U_0 \rightarrow \infty$ получаем энергетический спектр бесконечной прямоугольной ямы, а член с арктангенсом учитывает влияние конечности барьера — сдвиг уровней энергии по сравнению с изолированной ямой.

Далее перейдем к оценке эффективности выведенных формул на основе точных результатов для рассматриваемого прямоугольного потенциала. Несложный расчет приводит к следующим точным формулам для уровней энергии: в нечетных стационарных состояниях

$$\operatorname{tg}(kL_1) = -\frac{k}{\sqrt{U_0 - E}} \operatorname{th}(\sqrt{U_0 - E}L_2/2),$$

а в четных —

$$\operatorname{tg}(kL_1) = -\frac{k}{\sqrt{U_0 - E}} \operatorname{cth}(\sqrt{U_0 - E}L_2/2),$$

где волновое число $k = \sqrt{E}$.

Выберем в качестве типичного примера потенциал со следующими значениями параметров: $U_0 = 63,9714$ и $L_1 = L_2 = 1$. Тогда формула (6) в сопоставлении с численными расчетами энергий из точных уравнений (8) дает для энергетических щелей такие результаты: точное значение щели $\Delta E_0 = 0,00356026$ вычисляется по формуле (6) с относительной ошибкой $+2 \cdot 10^{-6} \%$, а то же для $\Delta E_1 = 0,0577064$ — с относительной ошибкой $-1 \cdot 10^{-3} \%$.

Добавим, что для следующей пары уровней,падающей как раз на максимум барьера U_0 (см. рис. 1), несложное аккуратное вычисление энергетических

ческой щели на основе общей формулы (2) дает при больших $U_0 \gg 1$ в первом приближении результат

$$\Delta \tilde{E}_3 \approx \frac{12}{(3L_1 + 2L_2)L_2} \left(1 - \frac{1}{(3L_1 + 2L_2)L_2} \cdot \frac{1}{U_0} \right). \text{ В част-}$$

ности, для выбранных в нашем примере параметров потенциала $\Delta \tilde{E}_3 \approx 2,39250$, что очень близко к точному значению $\Delta E_3 = 2,39995$.

Линейный потенциал. Следующая модель с непроницаемыми границами построена из линейных участков в виде барьера с изломом (рис. 2).

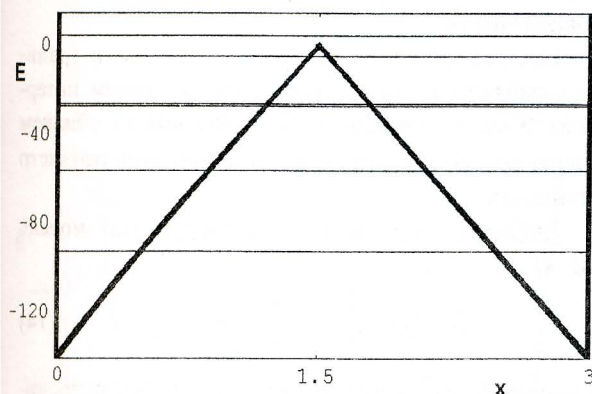


Рис. 2. Симметричный потенциал с линейным изломным барьером и непроницаемыми стенками.

Оценку точности расчета энергетических щелей рассмотрим на конкретном примере потенциала

$$U(x) = -a |x - 3/2|, \quad 0 < x < 3. \quad (9)$$

При этом в подбарьерном диапазоне энергий для пар расщепляемых уровней в общей формуле (2) для коэффициента прозрачности барьера можно использовать стандартное квазиклассическое выражение в режиме глубокого туннелирования

$$T = \exp(-2s), \quad (10)$$

где $s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{U(x) - E} dx$, а x_1 и x_2 являются прибарьерными точками поворота. В этом же приближении для периода колебаний в одной из ям имеем обычный

классический результат $\tau = \int_0^{x_1} \frac{1}{\sqrt{E - U(x)}} dx$. Поло-

жение же средних значений энергии расщепляемых пар задается правилами квантования (1), в которых барьерная фаза φ_{22} для режима глубокого туннелиро-

вания равна нулю [2], так что $\int_0^{x_1} \sqrt{E - U(x)} dx = \pi(n + 3/4)$, $n = 0, 1, \dots$

В качестве конкретного примера рассмотрим случай с $a = 93,9808$, когда в режиме туннелирования оказываются три пары уровней (рис. 2). Задача о

стационарных состояниях в такой модели допускает точное решение на основе функций Эйри и их производных: $Ai(z)$, $Bi(z)$, $Ai'(z)$ и $Bi'(z)$. В частности, уровни энергии E четных состояний определяются из условия обращения в ноль волновой функции при $x = 0$ и ее производной при $x = 3/2$, что приводит к уравнению

$$Bi\left(-\frac{E + 3/2 \cdot a}{a^{2/3}}\right) * Ai'\left(-\frac{E}{a^{2/3}}\right) = \\ = Ai\left(-\frac{E + 3/2 \cdot a}{a^{2/3}}\right) * Bi'\left(-\frac{E}{a^{2/3}}\right),$$

а для нечетных — из условия обращения в ноль волновой функции при $x = 0$ и $x = 3/2$ имеем уравнение

$$Bi\left(-\frac{E + 3/2 \cdot a}{a^{2/3}}\right) * Ai\left(-\frac{E}{a^{2/3}}\right) = \\ = Ai\left(-\frac{E + 3/2 \cdot a}{a^{2/3}}\right) * Bi\left(-\frac{E}{a^{2/3}}\right).$$

Это дает возможность численного расчета уровней энергии и соответствующих щелей с любой точностью, что и позволяет оценивать эффективность используемых приближенных расчетов.

Результаты первого квазиклассического приближения для щелей сводятся к следующему:

$$\Delta E_0^{(1)} = 0,0000403436 \text{ при относительной ошибке } -7 \%;$$

$$\Delta E_1^{(1)} = 0,0243506 \text{ при относительной ошибке } -3 \%;$$

$$\Delta E_2^{(1)} = 1,21228 \text{ при относительной ошибке } -3 \%.$$

Особый интерес представляют уточнения используемых формул в виде поправок второго квазиклассического приближения, причем как в правилах квантования энергии (1) и обобщенном периоде колебаний (3), так и в подбарьерном туннельном интеграле s в (10):

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{U(x) - E} dx + \\ + \frac{5}{12} \frac{d^3}{dE^3} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{dU}{dx} \right)^2 \sqrt{U(x) - E} dx - \\ - \frac{1}{2} \frac{d^2}{dE^2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2 U}{dx^2} \sqrt{U(x) - E} dx. \quad (11)$$

Результаты второго квазиклассического приближения для щелей оказываются на порядок более точными:

$$\Delta E_0^{(2)} = 0,0000430138 \text{ при относительной} \\ \text{ошибке } -0,2 \%;$$

$$\Delta E_1^{(2)} = 0,0250017 \text{ при относительной} \\ \text{ошибке } -0,2 \%;$$

$$\Delta E_2^{(2)} = 1,24613 \text{ при относительной ошибке } -0,6 \%.$$

Особенность третьей пары уровней состоит в том, что они находятся на границе между областью глубокого туннелирования и критическим диапазоном энергии вблизи максимума барьера, где требуется особый расчет [2], который продемонстрируем на следующей модели.

Квадратичный потенциал. Эта модель с непроницаемыми границами построена на основе параболического барьера (рис. 3):

$$U(x) = -a(x - 3/2)^2, \quad 0 < x < 3. \quad (12)$$

Все сказанное о приближенных расчетах энергетических щелей в предыдущем случае относится и к этой модели, а точное решение получается на основе функций параболического цилиндра с соответствующими граничными условиями.

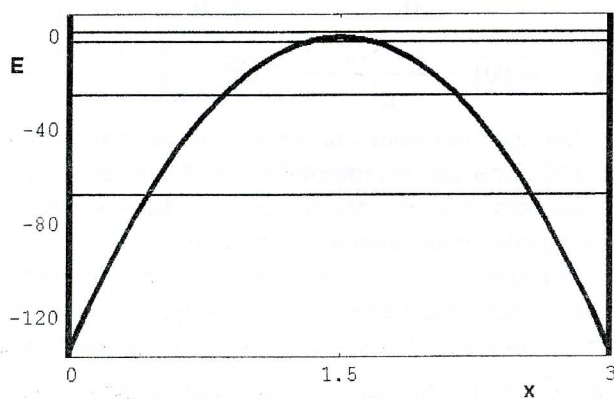


Рис. 3. Симметричный потенциал с квадратичным барьером и непроницаемыми стенками.

Не станем приводить деталей всех расчетов, а отметим в случае $a = 60,62$ результаты первого квазиклассического приближения: относительная ошибка для щели ΔE_0 составляет -7 %, а для ΔE_1 она равна +0,5 %, тогда как во втором квазиклассическом приближении эти ошибки равны соответственно -0,2 % и +0,03 %.

Добавим, что значение параметра $a = 60,62$ выбрано для того, чтобы средняя энергия третьей пары уровней энергии совпала как раз с максимумом барьера, где проявляются новые закономерности, присущие критическому диапазону энергий. Здесь расчет классического периода колебаний приводит к логарифмической расходимости по энергии (она отсчитывается от максимума барьера), которая компенсируется поправочным членом за счет производной барьерной фазы φ_{22} , также имеющей соответствующую расходимость. В результате получается конечная величина обобщенного периода:

$$\tau_0 = \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\frac{1}{4} \ln a + \ln 3 + \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} C \right), \quad (13)$$

где постоянная Эйлера $C = 0,577216$. Кроме того, в формуле (2) коэффициент прозрачности квадратично-

го барьера при $E = 0$ равен $T = 1/2$, т. е. он не мал, так что требуется уточнение формулы (2), куда в таком случае входит, как уже отмечалось, не \sqrt{T} , а $\arcsin(\sqrt{T})$. В результате для значения параметра $a = 60,62$ получаем энергетическую щель $\Delta E_2 = 4,43$, что оказывается очень близким к точному значению $\Delta E_2 = 4,47$. Относительная ошибка составляет -1 %. Подобное значение ошибки сохраняется и при других значениях параметра потенциала a , приводящих к аналогичной критической ситуации расположения энергетической щели одной из пар уровней энергии.

Предыдущие модели с непроницаемыми границами выбраны с одинаковым фиксированным интервалом $0 < x < 3$, чтобы не загромождать их обилием изменяющихся величин, оставив лишь один параметр потенциала.

Двойной линейный потенциал. Эта модель (рис. 4)

$$U(x) = a \left| \left| x - \frac{3}{2} \right| - \frac{3}{2} \right| - \frac{3}{2} a \quad (14)$$

во многом близка к линейному потенциалу с непроницаемой границей. Особенностью является расчет четных уровней энергии во втором квазиклассическом приближении, когда нужно корректно учитывать изломный характер потенциальных ям. В остальном точность расчета повторяет описанную в первой линейной модели, так что не станем злоупотреблять местом в статье, ограничившись сказанным.

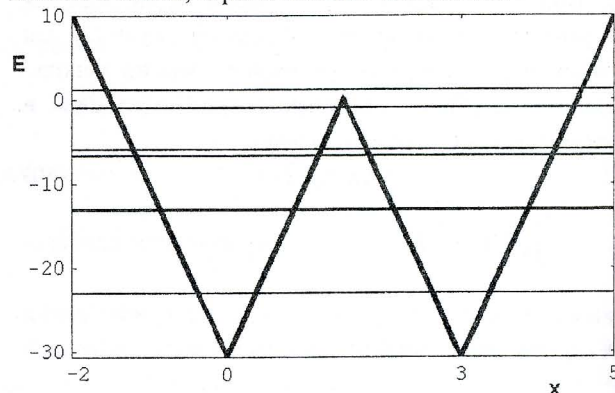


Рис. 4. Симметричный кусочно-линейный потенциал.

Двойной квадратичный потенциал. Особенностью данной модели (рис. 5)

$$U(x) = a \left(\left| x - \frac{3}{2} \right| - \frac{1}{2} \right)^2 \quad (15)$$

является отсутствие поправок квазиклассического приближения для уровней энергии и для независимого от энергии периода колебаний, так что главной заботой является правильный учет коэффициента прозрач-

ности для изломного барьера. Все сказанное относительно точности расчетов щелей для предыдущих моделей остается в силе и для данного случая.

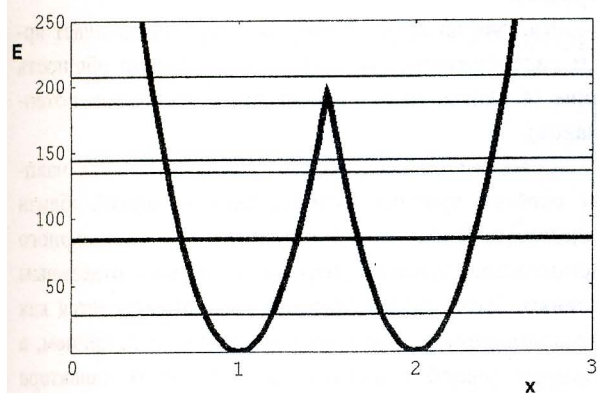


Рис. 5. Симметричный кусочно-квадратичный потенциал.

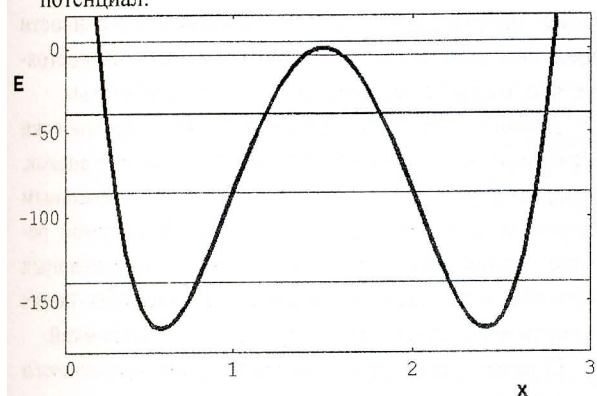


Рис. 6. Симметричный квадратично-четверной потенциал.

Квадратично-четверной потенциал. В отличие от предыдущих моделей, данная (рис. 6) не допускает точного аналитического решения для стационарных состояний, так что оценку точности применяемых формул для энергетических щелей проведем численными методами с помощью метода усеченной матрицы соответствующего гамильтониана в представлении некоторого гармонического осциллятора [4]. Рассмотрим конкретный пример такого потенциала

$$U(x) = a_4(x - 3/2)^4 - a_2(x - 3/2)^2 \quad (16)$$

с параметрами $a_4 = 240,858$ и $a_2 = 400$. При этом для щелей численный расчет дает следующие значения:

$$\Delta E_0 = 0,0000916114; \Delta E_1 = 0,0127416;$$

$$\Delta E_2 = 0,620245.$$

Относительные ошибки первого квазиклассического приближения составляют -8% , -3% , -1% , а учет поправок второго квазиклассического приближения доводит ошибки до значений $+1,6\%$, $+0,5\%$, $+0,5\%$. Расчет, подобный используемому при выводе формулы (13), для критического расположе-

ния уровней с $\Delta E_3 = 8,46080$ дает относительную ошибку -2% .

Гиперболический потенциал. Он построен на основе гиперболических функций (рис. 7):

$$U(x) = \frac{B^2}{4} \text{sh}^2(x) - B \left(S + \frac{1}{2} \right) \text{ch}(x). \quad (17)$$

где S принимает целые и полуцелые неотрицательные значения, а величина $B > 0$ изменяется непрерывно. Эта модель тесно связана с так называемыми спиновыми системами [5], а именно: спиновый гамильтониан $\hat{H} = -\hat{S}_z^2 - B\hat{S}_x$, построенный из операторов проекции спина \hat{S}_k и описывающий легкоосный анизотропный парамагнетик со спином S в поперечном магнитном поле B , имеет энергетический спектр, совпадающий с $2S+1$ нижними уровнями энергии в случае потенциала (15). Это позволяет находить уровни энергии гиперболического потенциала (15) с помощью уравнений для собственных значений спинового гамильтониана.

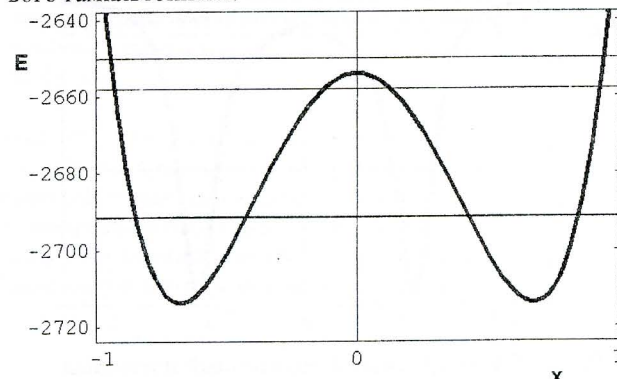


Рис. 7. Симметричный гиперболический потенциал.

В качестве конкретных значений параметров гиперболического потенциала выберем $S = 40$ и $B = 65,53$. При этом в подбарьерной области оказывается одна пара уровней энергии со щелью $\Delta E_0 = 0,28382$. Применение формулы (2) дает в первом приближении оценку с точностью -8% , а уточненное приближение увеличивает точность: ошибка равна $+1\%$. Кроме того, вторая пара уровней попадает в критический диапазон и обладает щелью $\Delta E_1 = 7,864$, расчет которой, подобно квадратичной модели, позволяет устранить расхождимости и обеспечить точность с относительной ошибкой -2% .

Солитонный потенциал. Он соответствует некоторому 4-солитонному решению уравнения Кортевега-де Фриза [6] и построен на основе экспонент по следующему правилу: если задать 4 произвольно выбранных параметра $0 < \kappa_3 < \kappa_2 < \kappa_1 < \kappa_0$, то получаем семейство пространственно локализованных потенциалов с помощью компактных формул

$$U(x) = -2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln[\det(F_{mn})];$$

$$F_{mn} = \delta_{mn} + 2 \frac{\sqrt{\kappa_m \kappa_n}}{\kappa_m + \kappa_n} \exp(\varphi_m + \varphi_n); \quad (18)$$

$$\varphi_n = \kappa_n x + \frac{1}{2} \sum_{m=0, m \neq n}^3 \ln \left| \frac{\kappa_n + \kappa_m}{\kappa_n - \kappa_m} \right|;$$

$$m, n = 0, 1, 2, 3$$

где δ_{mn} – символ Кронекера. Эти потенциалы имеют 4 связанных стационарных состояния с уровнями энергии $E_n = -\kappa_n^2$, а в области непрерывного спектра энергии $E > 0$ обладают свойством сверхпрозрачности: согласно стационарной теории рассеяния квантовые частицы проходят сквозь них безотражательно.

Подчеркнем, что эта модель отличается от всех предыдущих не столько наличием сплошного энергетического спектра, сколько тем, что можно произвольно задавать дискретные уровни энергии.

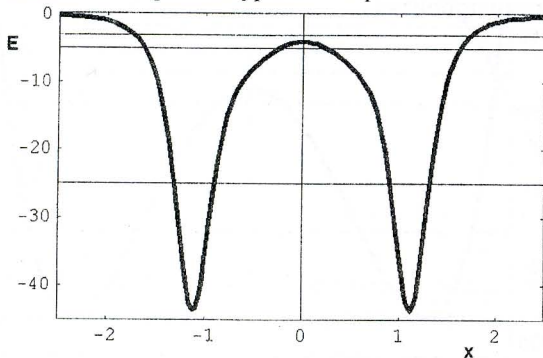


Рис. 8. Симметричный 4-солитонный потенциал.

В качестве конкретного примера (см. рис. 8) выбираем следующие значения энергий: $E_0 = -25$; $E_1 = -19.99$; $E_2 = -5$; $E_3 = -3.008$. При этом $(E_3 + E_2)/2 = U(0)$, так что для второй пары уровней энергии возникает критическая ситуация, а энергетические щели равны $\Delta E_0 = 0.01$; $\Delta E_1 = 1.992$. С помощью формулы (2) эти величины удастся рассчитать с такими относительными ошибками: в первом приближении для ΔE_0 получаем +11%, во втором приближении +3%, а в критической ситуации, требующей уже использованного в других моделях специального приема вычислений с компенсацией расходимости, для ΔE_1 удастся достичь точности с относительной ошибкой +1%.

Итак, во всех случаях результаты расчета энергетических щелей с помощью формулы (2) дают стабильно высокую точность: относительная ошибка составляет для грубого квазиклассического приближения несколько процентов, тогда как уточнение за счет поправок второго квазиклассического приближе-

ния (как для обобщенного периода, так и для коэффициента прозрачности) позволяет существенно уменьшить относительную ошибку (обычно на один или два порядка).

Каждая из рассмотренных моделей обладает ярким своеобразием, несмотря на некоторую общность форм (в запасе имеется еще ряд интересных потенциалов).

Отметим во всех рассмотренных моделях наличие особого критического диапазона энергий вблизи вершины барьера, где происходит переход от парного расположения уровней энергии со щелью к отдельным уровням. Здесь положение уровней определяется как туннелированием, так и надбарьерным отражением, а величина щелей существенно зависит от характера вершины барьера (скачок, излом, простой максимум, четверной максимум и т. д.). Кроме того, в этом диапазоне энергий имеются интересные особенности поведения волновых функций стационарных состояний, что, однако, выходит за рамки данной статьи.

Добавим, что численные величины, фактически рассчитанные с большим количеством верных знаков, приводятся в статье с округлением. Дополнительным контролем всех численных результатов служило решение уравнения Шредингера для стационарных состояний в соответствующих потенциальных полях баллистическим методом в сочетании с дихотомией.

О разных подходах к исследованию туннельного расщепления энергии и соответствующей литературе см. в [5].

Рассмотренные симметричные модели допускают простые деформации, что должно послужить объектом изучения туннельного расщепления в несимметричных ситуациях, которые предполагается рассмотреть в следующей части работы.

1. В.В. Ульянов, *Вестник ХГУ*, сер. "Физика", **600**, 27 (2003).
2. В.В. Ульянов, *О квазиклассическом движении частиц в полях с особенностями*, ХНУ, Харьков (2002).
3. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Наука, Москва (1989).
4. Ю.В. Василевская, В.В. Ульянов, *Вестник ХГУ*, сер. "Физика", **558**, 14 (2002).
5. V.V. Ulyanov, O.B. Zaslavskii, *Phys. Rep.*, **216**, 179 (1992).
6. Ю.В. Василевская, В.В. Ульянов, *Вестник ХГУ*, сер. "Физика", **417**, 9 (1998).

The tunnel splitting of energy levels in nonsymmetrical cases. II

V.V. Ulyanov

The tunnel splitting of energy levels in nonsymmetrical potentials is considered.

Новые спиновые квазиточнорешаемые модели

Ю.В.Василевская, В.В.Ульянов

*Харьковский национальный университет им. В.Н.Каразина
Украина, 61077, г. Харьков, пл. Свободы, 4
E-mail: Vladimir.V.Ulyanov@univer.kharkov.ua*

Получены новые точные решения уравнения Шредингера спинового происхождения, имеющие простые явные аналитические выражения для потенциальных полей, уровней энергии и волновых функций стационарных состояний. С помощью методов квантовой теории спиновых систем найдены новые точные решения одномерного стационарного уравнения Шредингера для ряда моделей эффективных потенциалов. Выведены формулы для энергетического спектра и соответствующих волновых функций.

Отримано нові точні розв'язки рівняння Шредінгера спінового походження, що мають прості явні аналітичні вирази для потенціальних полів, рівнів енергії та хвильових функцій стаціонарних станів. За допомогою методів квантової теорії спінових систем знайдено нові точні розв'язки одновимірного стаціонарного рівняння Шредінгера для деяких моделей ефективних потенціалів. Виведено формули для енергетичного спектра та відповідних хвильових функцій.

PACS: 03.65.-w

УДК 530.145

Введение

В квантовой теории проблема точных решений уравнения Шредингера для стационарных состояний частицы в потенциальном поле постоянно привлекает внимание специалистов. Точно решаемые задачи служат основой иллюстраций теории стационарных состояний в квантовой механике [1]. Кроме того, они являются фундаментом для постановки новых задач, важны как база приближенных методов.

Вообще, множество таких решений образует важный фонд квантовой механики, используемый как при изучении сложных явлений и при проверке новых теорий, так и имеющий самостоятельное значение. Совершенно естественно, что обращение к вопросам точных решений вызывает постоянный интерес. Можно выделить три периода интенсивного появления новых точно решаемых моделей.

В середине и конце 1920-х годов появились первые точно решаемые модели с простыми выражениями для потенциалов, уровней энергии и волновых функций стационарных состояний — гармонический осциллятор, кулоновское поле, потенциалы Морса, Экарта, Пешля-Теллера, бесконечная прямоугольная яма, дельта-яма [1]. Затем наступило время различных обобщений, усложнений, композиций из разных моделей и т. п.. Процесс поисков новых точно решаемых моделей продолжался, но его плоды оказывались либо слишком сложными, громоздкими, либо очень абстрактными.

Первый прорыв в область новых простых точно решаемых моделей обязан развитию теории солитонов. Связь одномерного стационарного уравнения Шредингера с нелинейным эволюционным уравнением Кортевега-

де Фриза в теории солитонов приводит к появлению разнообразных классов особых локализованных моделей потенциальных полей, у которых имеются простые явные аналитические формулы для уровней энергии и волновых функций стационарных состояний в квантовой механике. Существенно, что в отличие от других моделей с точными решениями в квантовой механике, для которых задается потенциал и решается уравнение Шредингера (задача о собственных значениях), в результате чего получаются уровни энергии, в моделях солитонного происхождения сразу же задаются уровни энергии и для каждого набора уровней существуют достаточно простые потенциалы с точными решениями. Другими словами, мы имеем дело с обратной задачей — задаются уровни энергии (произвольно расположенные!) и для них строятся потенциалы. Еще одной важной особенностью потенциалов солитонной природы является то, что для каждого набора уровней энергии находится не один фиксированный профиль потенциала, а бесконечное многопараметрическое семейство потенциальных моделей [2].

Другое направление связано с обнаружением новых классов точных решений на основе недавно разработанных методов в квантовой теории спиновых систем [3]. Так, при решении задачи о собственных значениях гамильтониана подобных спиновых систем оказывается, что энергетический спектр совпадает с некоторыми уровнями энергии частицы, движущейся в потенциальном поле определенного вида. В данном случае мы имеем дело с методом эффективного поля, приводящего к переходу от дискретного пространства к координатному. Для ассоциированной координатной системы это дает методы нахождения новых точных решений уравнения Шредингера с простыми явными

аналитическими выражениями для потенциальных моделей, энергетических уровней и волновых функций стационарных состояний. При этом интерес представляют такие случаи, когда спин не очень велик, так что характеристические уравнения в спиновом пространстве имеют простые явные решения. Число точных решений в рассматриваемых моделях оказывается конечным. Это свойство получило название «квазиточнорешаемости», а соответствующие принципиально новые объекты в квантовой механике получили название «квазиточнорешаемых» моделей.

При этом стационарные состояния с точными решениями относятся к нижней части энергетического спектра, начиная с основного уровня энергии. Такой подход при описании спиновых систем оказывается полезным при изучении физических свойств анизотропных парамагнетиков во внешнем магнитном поле (энергетического спектра, намагнитченности, восприимчивости, спинового туннелирования) [3].

Появление новых квантовых задач с точными решениями, источником которых явились системы спиновой природы, существенно обогатило множество моделей потенциалов с простыми явными аналитическими формулами для уровней энергии и волновых функций стационарных состояний в квантовой механике. Специфика новых моделей состоит прежде всего в разнообразии профилей потенциалов, а их отличительная особенность – физический смысл уже при своем появлении, поскольку они явились не плодом математических преобразований, а результатом исследования конкретных физических систем, в частности спиновых.

Очень важно иметь такой комплекс точных решений для методических иллюстраций, а также как базу проверки приближенных методов. Появляется наглядный способ демонстрации структуры спектра в случае потенциалов с экстремумами высокого порядка, попадания уровней в критический диапазон энергий вблизи максимумов потенциала, а также квантовых эффектов типа туннельного расщепления, формирования зонного спектра и т. п.

Нахождению новых точных решений уравнения Шредингера спинового происхождения и посвящена данная работа.

Метод эффективных потенциалов для спиновых систем

Обратимся к спиновым эффективным потенциалам. Метод нахождения точных решений, разработанный при исследовании спиновых систем [3], основан на рассмотрении гамильтонианов, построенных из генераторов некоторой группы Ли (в частности, спиновых операторов), и использовании представления обобщенных (в частности, спиновых) когерентных состояний. В соответствующем координатном пространстве такой гамильтониан становится дифференциальным оператором, в частности оператором Шредингера с некоторой эффективной потенциальной энергией. При этом собственные значения энергии спиновой системы связаны с нижним участком энергетического

спектра соответствующего эффективного потенциала. Такой метод потенциального поля, с одной стороны, может быть эффективен при изучении физических свойств спиновых систем, например, поведения магнитной восприимчивости в существенно квантовой области, спинового туннелирования и т. п. С другой стороны, соответствие между спиновыми и координатными системами приводит к открытию новых классов точных решений уравнения Шредингера.

Спин представляет собой квантовомеханический объект дискретной природы, поэтому уравнения, возникающие при нахождении собственных значений спиновых гамильтонианов, имеют матричную форму. Это существенно затрудняет анализ свойств энергетического спектра спиновых систем при больших значениях спина. Оказывается, что для некоторого класса спиновых систем можно ввести такое потенциальное описание, при котором уровни энергии спиновой системы совпадают с частью энергетического спектра соответствующего уравнения Шредингера с некоторой потенциальной энергией достаточно простого вида. Следовательно, для анализа свойств данной спиновой системы, особенно при больших значениях спина $S \gg 1$, можно воспользоваться хорошо известными методами исследования решений уравнения Шредингера – например, теорией возмущений, квазиклассическим приближением, вариационным методом.

Особенно важно, что для не очень больших значений спина возможно нахождение собственных значений спинового гамильтониана непосредственно в дискретном спиновом представлении как корней характеристического уравнения, так что получаются простые явные аналитические формулы для энергетического спектра и векторов состояний спиновой системы, а тем самым для уровней энергии и волновых функций стационарных состояний соответствующей эффективной потенциальной модели.

Таким образом, спин-координатное соответствие приводит к открытию новых точных решений уравнения Шредингера [3].

Остановимся подробнее на указанном методе нахождения точных решений. В получающемся координатном представлении такой гамильтониан становится дифференциальным оператором, в частности оператором Шредингера с некоторой эффективной потенциальной энергией. Найденные потенциалы для простых спиновых систем либо имеют форму нелокализованных ям, либо оказываются периодическими. Во всех случаях имеются как симметричные, так и несимметричные разнообразные многопараметрические потенциальные модели.

Рассмотрим простейший случай системы, соответствующей модели парамагнетика с анизотропией типа «легкая ось» (легкоосного) во внешнем магнитном поле, перпендикулярном оси анизотропии, и описываемой следующим гамильтонианом:

$$H = -S_z^2 - BS_x, \quad (1)$$

где B – магнитное поле с точностью до постоянного множителя, S_j – оператор j -й проекции спина. В работе будет использоваться терминология из области магнитных явлений, хотя результаты касаются спиновых систем

любой природы, у которых величина эффективного спина (псевдоспина, квазиспина), которую будем называть просто спином, может быть как малой ($S \sim 1$), так и сравнительно большой ($S \sim 1$).

Используемые в данном гамильтониане переменные обезразмерены следующим образом: в качестве безразмерной энергии вводится отношение энергии к абсолютной величине константы анизотропии, что приводит и к соответствующей безразмерной характеристике магнитного поля B . Изменение знака при первом слагаемом в (1) на «+» приводит к гамильтониану, описывающему парамагнетик с анизотропией типа «легкая плоскость», или легкоплоскостной парамагнетик.

При исследовании энергетического спектра такой системы в работе [3] пришли к стандартному одномерному уравнению Шредингера для стационарных состояний

$$\psi'' + \left[E - \frac{B^2}{4} \text{sh}^2(x) + B \left(S + \frac{1}{2} \right) \text{ch}(x) \right] \psi = 0, \quad (2)$$

где x – некоторая безразмерная координата, а решение $\psi(x)$, убывающее на бесконечности, является волновой функцией.

Итак, проблема собственных значений и собственных векторов спинового гамильтониана (1) приводит к координатной картине псевдочастицы, движущейся в эффективном потенциальном поле

$$U(x) = \frac{B^2}{4} \text{sh}^2(x) - B \left(S + \frac{1}{2} \right) \text{ch}(x). \quad (3)$$

В отличие от хорошо известных стандартных квантовомеханических моделей потенциал (3) имеет зависимость от параметров – их два, но они могут меняться: значения магнитного поля B – непрерывным образом, а спиновый параметр S «пробегает» дискретный ряд целых и полуцелых значений. Следует отметить, что под S мы понимаем некоторый условный спиновый параметр, который в зависимости от конкретной физической системы может иметь смысл спина, эффективного спина, квазиспина, псевдоспина, а также момента самого общего вида.

Модель (3) при $B < B_0 = 2S + 1$ целесообразно записать следующим образом:

$$U(x) = -\frac{B_0^2 + B^2}{4} + \frac{B^2}{4} \left[\text{ch}(x) - \frac{B_0}{B} \right]^2. \quad (4)$$

Отсюда ясно, что при малых B потенциал (4) имеет вид двух достаточно удаленных ям, которые при увеличении B сближаются (рис. 1 а). При $B = B_0$ эта модель принимает форму ямы с минимумом четвертого порядка (рис. 1 б):

$$U(x) = -\frac{B_0^2}{2} + B_0^2 \text{sh}^4\left(\frac{x}{2}\right). \quad (5)$$

При $B > B_0$ имеем яму с одним минимумом (рис. 1 с). Обнаружение такой двухъямной потенциальной модели, как и потенциала с четверным минимумом, представляет специальный интерес. Так, задача о двухъямном потенциале возникает в квантовой теории молекул, а в теории магнитных систем двухъямная модель дает наглядную трактовку

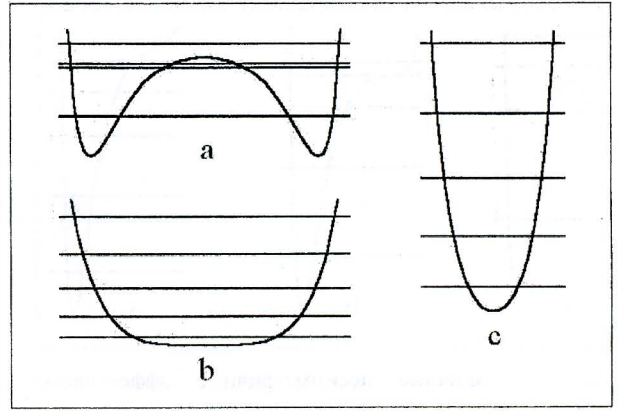


Рис. 1. Характерные формы симметричных эффективных потенциалов.

явлению так называемого спинового туннелирования.

Модель с минимумом четвертого порядка также чрезвычайно любопытна: как известно, степенной потенциал $U(x) = Qx^4$ не имеет точных решений, тогда как рассматриваемая более сложная 4-гиперболическая модель (5) таковыми обладает.

Приведем теперь пример несимметричного точно решаемого спинового потенциала. К такой модели можно прийти, если рассматривать гамильтониан, описывающий легкоосный парамагнетик в наклонном по отношению к оси магнитном поле $H = -S_z^2 - B_x S_x - B_z S_z$. Эффективный потенциал в этом случае имеет следующий вид:

$$U(x) = \frac{B_z^2}{4} \left[\text{sh}(x) - \frac{B_x}{B_z} \right]^2 - B_x \left(S + \frac{1}{2} \right) \text{ch}(x). \quad (6)$$

Укажем, что такой потенциал содержит три параметра: дискретный спиновый и непрерывно изменяющиеся компоненты магнитного поля B_x и B_z . Потенциал может быть как несимметричным двухъямным (рис. 2 а), так и ямой с одним минимумом (рис. 2 б), обладая также промежуточными формами с характерным «уступом» (рис. 2 с), а также превращаясь в упомянутую выше симметричную модель, в зависимости от соотношения между компонентами магнитного поля B_x и B_z .

Наконец, рассмотрим пример периодического потенциала, к которому можно прийти при исследовании спиновой системы с гамильтонианом следующего вида:

$$H = \alpha S_z^2 - \beta S_y^2 - B S_x, \quad (7)$$

где $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ – константы анизотропии. Гамильтониан (7) описывает, например, двухосный парамагнетик в магнитном поле B , перпендикулярном осям анизотропии. В этом случае можно также прийти к стандартному уравнению Шредингера, описывающему движение квазичастицы в периодическом потенциальном поле

$$U(x) = \frac{W_1 \text{sn}^2(x) - W_2 \text{cn}(x)}{\alpha + \beta \text{cn}^2(x)}, \quad (8)$$

где $W_1 = B^2/4 - \alpha \beta t S(S+1)$, $W_2 = (\alpha + \beta) B(S + 1/2)$,

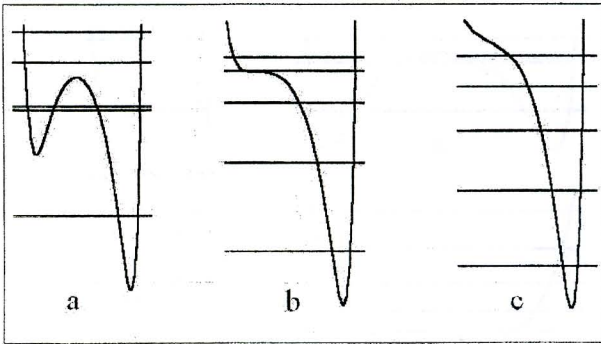


Рис. 2. Типичные несимметричные эффективные потенциалы.

построенном из эллиптических функций Якоби с модулем $k = \sqrt{\beta/(\alpha+\beta)}$.

Поскольку спиновая система (7) при небольших S допускает точное решение в виде простых явных формул для уровней энергии и векторов стационарных состояний, то и уравнение Шредингера имеет соответствующие точные решения: собственные значения спин-гамильтониана (7) совпадают на этот раз с $2S+1$ крайними уровнями энергии низших энергетических зон (чередующимися дном и потолком зоны) в потенциальном поле (8) [3].

С ростом магнитного поля B минимумы ям в ячейках периодического потенциала претерпевают изменения от двойных до одиночных через четверные, а форма максимумов барьеров изменяется в обратном порядке (рис. 3 а,с). Оказывается, что при $\alpha=\beta$ существует некоторое критическое значение магнитного поля $B_0 = 2\alpha\sqrt{S(S+1)}$, при котором ячейка потенциала имеет одновременно как четверной минимум, так и четверной максимум (рис. 3 б). О других спиновых эффективных потенциалах и о конкретных примерах спиновых систем в различных областях физики см. в обзоре [3].

Следует еще раз подчеркнуть, что эффективные потенциалы позволяют понять характер изменения энергетического спектра в зависимости от параметров спиновой системы, тогда как абстрактный вид спин-гамильтонианов и их матриц обычно не позволяет этого сделать.

Далее переходим к главной задаче нашей работы – нахождению точных решений в явном виде для различных значений спинового параметра и характеристик магнитного поля в случае эффективных потенциалов спинового происхождения.

Уровни энергии для спиновых точных решений

Как уже отмечалось в предыдущем подразделе, $2S+1$ низших уровней энергии частицы, движущейся в эффективном потенциальном поле

$$U(x) = \frac{B^2}{4} \text{sh}^2(x) - B(S + \frac{1}{2}) \text{ch}(x) \quad (9)$$

соответствующем легкоосному парамагнетику в поперечном магнитном поле, т. е. спиновой системе с гамильтонианом

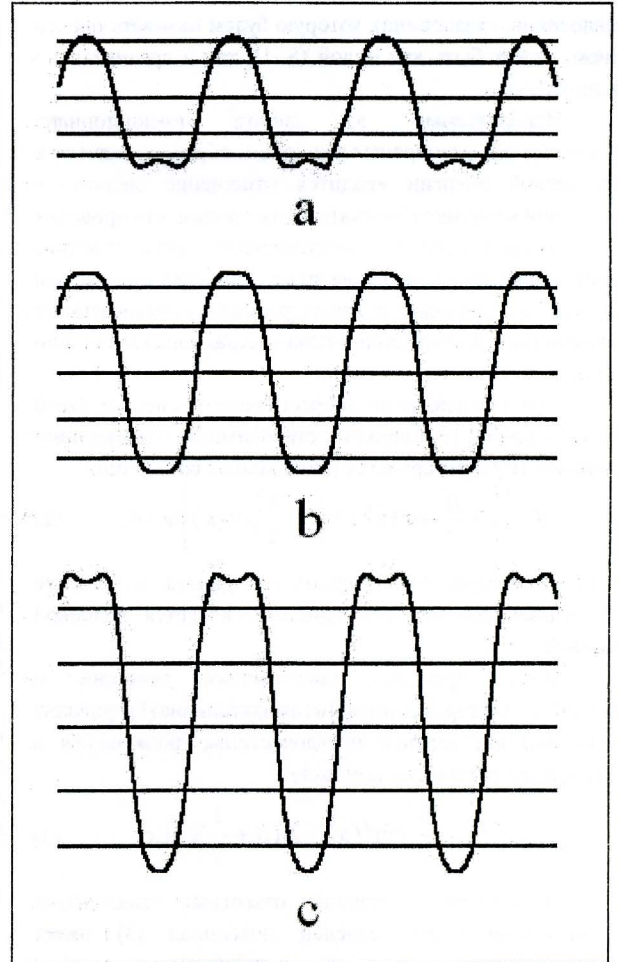


Рис. 3. Примеры периодических эффективных потенциалов.

$H = -S_z^2 - BS_x$, совпадают с энергетическим спектром этого гамильтониана. Таким образом, задача сводится к нахождению собственных значений спинового гамильтониана, т. е. решению уравнения $\hat{H}\psi = E\psi$. В представлении, где диагональна проекция спина S_z , это уравнение для рассматриваемого гамильтониана, записывается в виде

$$(E + \sigma^2)c_\sigma + \frac{B}{2}[(S - \sigma + 1)c_{\sigma-1} + (S + \sigma + 1)c_{\sigma+1}] = 0,$$

где $c'_{\sigma+1} = 0, c'_{\sigma-1} = 0$. Величины c_σ определяют собственный вектор в указанном представлении, а квантовое число $\sigma = -S, S+1, \dots, S-1, S$ отвечает z -проекции спина.

Подстановка $c_\sigma = c'_\sigma \sqrt{(S-\sigma)!(S+\sigma)!}$ позволяет избавиться от радикалов в этих уравнениях:

$$(E + \sigma^2)c'_\sigma + \frac{B}{2}[(S - \sigma + 1)c'_{\sigma-1} + (S + \sigma + 1)c'_{\sigma+1}] = 0. \quad (10)$$

Система линейных однородных уравнений (10) имеет ненулевое решение, если определитель системы равен нулю, что и является средством для вычисления уровней энергии E . Чтобы записать явно такое характеристическое уравнение, удобно воспользоваться методом цепных дробей [4]. Этот метод заключается в том, что условием

разрешимости системы уравнений в виде трехчленного соотношения

$$-\alpha_k g_{k+1} + \beta_k g_k - \gamma_k g_{k-1} = 0, \quad (11)$$

$(k = 0, 1, \dots, k_{\max})$ является обращение в ноль конечной цепной дроби:

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + b_2 + \dots + \frac{a_n}{b_n}} = \frac{P_n}{Q_n} = 0, \quad (12)$$

где $a_k = -\alpha_{k-1}\gamma_k$, $b_k = \beta_k$, а полиномы P_k строятся с помощью рекуррентных соотношений

$$P_k = b_k P_{k-1} + a_k P_{k-2}, P_0 = b_0, P_{-1} = 1, k = 1, 2, \dots, k_{\max}. \quad (13)$$

Система уравнений (10) имеет именно такой трехчленный вид, если сделать замену переменных

$$k = S + \sigma, c'_\sigma = c'_{k-S} = g_k.$$

Тогда в общем случае получаем множители в трехчленных уравнениях (11):

$$\alpha_k = -\frac{1}{2}B(k+1), \quad \beta_k = E + (k-S)^2$$

$$\gamma_k = -\frac{1}{2}B(2S+1-k), \quad (14)$$

а в рекуррентных соотношениях для полиномов (13) коэффициенты равны

$$a_k = -\frac{B^2}{4}k(2S+1-k), b_k = E + (k-S)^2. \quad (15)$$

При этом $k = 0, 1, \dots, 2S$, так что полином $P_{2S}(E)$ будет степени $2S+1$ по E , т. е. всего будет $2S+1$ корней характеристического уравнения, как и должно быть для данной спинной системы. Поэтому найти в явном виде корни таких уравнений, вообще говоря, удастся только для небольших значений спина $S = 0, 1/2, 1, 3/2$.

Можно, однако, воспользоваться свойствами симметрии рассматриваемого гамильтониана, чтобы существенно понизить степень характеристических уравнений, отделив четные решения от нечетных. Рассмотрим эту процедуру несколько подробнее. Вначале будем считать, что S является целым числом. Тогда в случае четных состояний с $c'_{-\sigma} = c'_\sigma$ систему уравнений (10) можно оборвать при $\sigma=0$, когда

$$Ec'_0 + \frac{1}{2}B[(S+1)c'_{-1} + (S+1)c'_1] = 0, \quad (16)$$

что в силу $c'_1 = c'_{-1}$ дает граничное соотношение

$$Ec'_0 + B(S+1)c'_{-1} = 0, \quad (17)$$

т. е. последний коэффициент в рекуррентных соотношениях будет вдвое больше, если оборвать k на максимальном значении $k_{\max} = S$, так что $a_S = -\frac{1}{2}B^2S(S+1)$.

В случае же нечетных состояний с $c'_{-\sigma} = -c'_\sigma$ система уравнений (10) обрывается при $\sigma=0$, так как $c'_0 = 0$, так что $k_{\max} = S-1$.

Аналогичным образом для полуцелых значений S имеем в случае четных состояний с $c'_{-\sigma} = -c'_\sigma$ при $\sigma = -\frac{1}{2}$

$$(E + \sigma^2)c'_\sigma + \frac{B}{2}[(S - \sigma + 1)c'_{\sigma-1} + (S + \sigma + 1)c'_{\sigma+1}] = 0$$

или

$$(E + \frac{1}{4})c'_{-1/2} + \frac{B}{2}[(S + \frac{3}{2})c'_{-3/2} + (S + \frac{1}{2})c'_{1/2}] = 0, \quad (18)$$

т. е. при $k_{\max} = S-1/2$ граничное значение коэффициента $b_{S-1/2}$ будет отличаться от других его значений:

$$b_{S-1/2} = E + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}B(S + \frac{1}{2}). \quad (19)$$

Точно так же в случае нечетных состояний этот коэффициент будет равен

$$b_{S-1/2} = E + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}B(S + \frac{1}{2}). \quad (20)$$

Итак, полиномы для соответствующих уровней энергии будут строиться по правилу:

$$P_k = b_k P_{k-1} + a_k P_{k-2}, P_0 = b_0, P_{-1} = 1, \quad (21)$$

где в случае целых S

– для четных состояний $k = 0, 1, \dots, S$,

$$a_k = -\frac{1}{4}B^2k(2S+1-k), k < S,$$

$$a_k = -\frac{1}{2}B^2S(S+1), k = S, b_k = E + (k-S)^2; \quad (22)$$

– для нечетных состояний $k=0, 1, \dots, S-1$

$$a_k = -\frac{1}{4}B^2k(2S+1-k), b_k = E + (k-S)^2; \quad (23)$$

а в случае полуцелых S

– для четных состояний $k=0, 1, \dots, S-1/2$

$$a_k = -\frac{1}{4}B^2k(2S+1-k),$$

$$b_k = E + (k-S)^2, k < S-1/2, b_k = E + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}B(S + \frac{1}{2}), k = S-1/2, \quad (24)$$

– для нечетных состояний $k=0, 1, \dots, S-1/2$

$$a_k = -\frac{1}{4}B^2k(2S+1-k),$$

$$b_k = E + (k-S)^2, k < S-1/2, b_k = E + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}B(S + \frac{1}{2}), k = S-1/2. \quad (25)$$

На основе полученных правил построения характеристических уравнений перейдем к основной задаче нахождения уровней энергии для конкретных значений спина S . В тривиальном для спинного гамильтониана случае $S = 0$ имеется единственное собственное значение $E_0 = 0$, но для частицы в потенциальном поле (9) это есть важный основной уровень энергии, который при всех типичных для данного значения параметра S деформациях потенциала от двойной ямы при $B < 1$ до одинарной при (через промежуточную форму ямы с четверным минимумом при $B = 1$) остается постоянным при изменении параметра B .

В случае $S = 1/2$ пара уровней энергии также непосредственно видна из структуры гамильтониана:

$$E_{0,1} = -\frac{1}{4} \mp \frac{1}{2} B. \quad (26)$$

Здесь и в дальнейшем первые индексы в обозначениях для уровней энергии отвечают верхним знакам в формулах.

В случае $S=1$ для четных состояний полином $P_1(E) = E(E+1) - B^2$ дает уровни энергии

$$E_{0,2} = -\frac{1}{2} \mp \sqrt{\frac{1}{4} + B^2}, \quad (27)$$

а для нечетного состояния $P_0(E) = b_0 = E+1$, так что $E_1 = -1$. (28)

Этот результат также заслуживает внимания, поскольку для частицы в потенциальном поле (9) это есть энергия первого возбужденного состояния, которая аналогично рассмотренному выше случаю $S=0$ при всех деформациях потенциала от двойной ямы при $B < 3$ до одинарной при $B > 3$ (через промежуточную форму ямы с четверным минимумом при $B=3$) остается постоянной при изменении параметра B .

В случае $S=3/2$ для четных состояний полином

$$P_1(E) = (E + \frac{1}{4} + B)(E + \frac{9}{4}) - \frac{3}{4} B^2 \quad (29)$$

приводит к уравнению

$$E^2 + (\frac{5}{2} + B)E + \frac{9}{16} + \frac{9}{4}B - \frac{3}{4}B^2 = 0,$$

так что

$$E_{0,2} = -\frac{5}{4} - \frac{1}{2}B \mp \sqrt{1 - B + B^2}, \quad (30)$$

а для нечетных состояний полином

$$P_1(E) = (E + \frac{1}{4} + B)(E + \frac{9}{4}) - \frac{3}{4} B^2$$

отличается от предыдущего только знаком при B , так что

$$E_{0,2} = -\frac{5}{4} - \frac{1}{2}B \mp \sqrt{1 - B + B^2}. \quad (31)$$

Заметим, что в предыдущих случаях небольших значений спина $S=0, 1/2, 1, 3/2$ точные выражения для уровней энергии имели исключительно простой вид и содержали лишь степени параметра B и радикалы. Продолжая построения характеристических полиномов в случаях «средних» значений спина $S=2, 5/2, 3, 7/2, 4$, мы переходим к качественно новым структурам точных формул для уровней энергии, в которых будут фигурировать наряду с радикалами и полиномами также тригонометрические и обратные тригонометрические функции. При этом ради краткости изложения в дальнейшем мы опускаем промежуточные выкладки с вычислениями полиномов с помощью рекуррентных соотношений, приводя только окончательные выражения для характеристических уравнений.

В случае $S=2$ для четных состояний получаем кубическое уравнение

$$E^3 + 5E^2 + 4(1-B^2)E - 12B^2 = 0, \quad (32)$$

корни которого, определяющие уровни энергии, в

соответствии с «тригонометрическим» методом решения таких уравнений [5] удобно записать в следующем виде:

$$E_4 = -\frac{5}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{13+12B^2} \cos \left[\frac{1}{3} \arccos \frac{72B^2-35}{(13+12B^2)^{3/2}} \right],$$

$$E_4 = -\frac{5}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{13+12B^2} \cos \left[\frac{1}{3} \arccos \frac{72B^2-35}{(13+12B^2)^{3/2}} \right], \quad (33)$$

$$E_4 = -\frac{5}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{13+12B^2} \cos \left[\frac{1}{3} \arccos \frac{72B^2-35}{(13+12B^2)^{3/2}} \right]$$

Для нечетных состояний характеристическое уравнение оказывается квадратным:

$$E^2 + 5E + 4 - B^2 = 0, \quad (34)$$

так что нечетные уровни энергии равны

$$E_{1,3} = -\frac{5}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{9+4B^2}. \quad (35)$$

В случае $S=5/2$ для четных состояний получаем кубическое уравнение

$$E^3 + \frac{35+6B^2}{14}E^2 + \frac{259+204B-52B^2}{16}E + \frac{5(45+270B-164B^2-24B^3)}{64} = 0$$

дает три уровня энергии, которые здесь и в аналогичных случаях в дальнейшем будем объединять в одной краткой записи:

$$E_m = -\frac{35+6B}{12} + \frac{4}{3}\sqrt{7-3B+3B^2} \times \\ \times \cos \left[\frac{1}{3} \arccos \frac{36B^2-9B-40}{4(7-3B+3B^2)^{3/2}} + \varphi_m \right], \\ \varphi_m = \frac{\pi}{12} (3m^2 - 14m + 8), m = 0, 2, 4, \quad (36)$$

а для нечетных состояний аналогичное уравнение отличается только знаком при B , так что соответствующие уровни энергии равны

$$E_m = -\frac{35+6B}{12} + \frac{4}{3}\sqrt{7+3B+3B^2} \times \\ \times \cos \left[\frac{1}{3} \arccos \frac{36B^2+9B-40}{4(7+3B+3B^2)^{3/2}} + \varphi_m \right], \\ \varphi_m = \frac{\pi}{12} (3m^2 - 20m + 25), m = 1, 3, 5. \quad (37)$$

В случае $S=3$ для четных состояний впервые возникает характеристическое уравнение четвертой степени:

$$E^4 + 14E^3 + (49-10B^2)E^2 + \\ + (36-102B^2)E - 216B^2 + 9B^4 = 0,$$

корни которого, определяющие четыре уровня энергии, можно представить в явном виде с помощью компактных формул по методу Феррари [5] с объединением попарно:

$$E_{4,6} = -\frac{7}{2} + \sqrt{y} \mp \sqrt{\frac{49}{4} + 5B^2 - y - (9 - 8B^2)/\sqrt{y}}, \quad (39)$$

где согласно этому методу введено решение вспомогательного кубического уравнения (кубической resolvent):

$$y = \frac{1}{12}(49 + 20B^2) + \frac{1}{6}\sqrt{889 + 712B^2 + 208B^4} \times \\ \times \cos \left[\frac{1}{3} \arccos \frac{24013 - 24132B^2 + 21072B^4 + 2240B^6}{(889 + 712B^2 + 208B^4)^{3/2}} \right]. \quad (40)$$

Для нечетных уровней приходим к кубическому уравнению:

$$E^3 + 14E^2 + (49 - 4B^2)E + 36 - 24B^2 = 0. \quad (41)$$

Его корни также можем выписать в явном виде:

$$E_m = -\frac{14}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{49 + 12B^2} \times \\ \times \cos \left[\frac{1}{3} \arccos \frac{72B^2 - 143}{(49 + 12B^2)^{3/2}} + \Phi_m \right], \\ \Phi_m = \frac{\pi}{12}(3m^2 - 20m + 25), m = 1, 3, 5. \quad (42)$$

Аналогичные результаты получаются в случаях $S=7/2$ и $S=4$. Дальнейшее увеличение спинового параметра S приводит к характеристическим уравнениям еще более высокой степени, так что явных выражений для уровней энергии при произвольных B уже не будет. Однако само наличие таких алгебраических уравнений означает, что при всех как угодно больших значениях спина S имеются точные решения уравнения Шредингера для частицы, движущейся в потенциальном поле (9), выражаемые неявно, что само по себе является важным следствием метода эффективных потенциалов для спиновых систем. Кроме того, при критическом значении параметра $B=2S+1$ потенциал имеет форму ямы с уплощенным дном – минимумом 4-го порядка. Тем самым получаем точные решения для подобного вида ангармонического осциллятора $U(x) \sim sh^4(x)$, тогда как более простой чисто степенной четверной осциллятор $U(x) \sim x^4$ точных решений не имеет (более детально этот вопрос рассмотрен в наших работах [6-7]). Во-вторых, точные результаты для уровней энергии будут непосредственно входить в точные выражения для волновых функций стационарных состояний (здесь мы их не приводим). В-третьих, точные формулы для уровней энергии описывают при каждом данном S весь энергетический спектр спиновой системы, позволяя непосредственно получать конкретные физические характеристики (например, намагнитченность и восприимчивость анизотропного парамагнетика в магнитном поле) как в чисто квантовых стационарных состояниях, так и в термодинамике. Кроме того, очень важно иметь точные выражения в качестве тестовых примеров для контроля расчетов при других значениях параметров, когда

используются различные приближенные аналитические и численные методы. Здесь мы привели результаты только для одного вида спиновых систем с гамильтонианом (1) и эффективным потенциалом (9). Другие спиновые системы рассматриваются аналогичным образом. С деталями можно познакомиться в нашей работе [8].

Закключение

Используемое в работе спин-координатное соответствие «расширяет» спиновую систему, «оснащая» ее такими объектами, как непрерывное координатное пространство, псевдочастица, эффективные потенциалы, дифференциальные уравнения. Оно затрагивает не только собственно спиновые системы, но отвечает также операторам момента самой общей природы. Название «спин», в этом смысле является дважды условным: это и эффективный (квази-, псевдо-) спин, и представитель операторов момента общего вида (в состояниях с определенным значением квадрата момента).

Для изучения физических свойств рассмотренных спиновых систем чрезвычайно полезным и наглядным оказался метод эффективного потенциала (как для интерпретации физических явлений, так и для количественных расчетов).

Рассмотренные модели эффективных потенциалов резко отличаются от известных стандартных моделей потенциальных полей: каждая модель имеет несколько независимых параметров, существенно влияющих на форму потенциала и на структуру энергетического спектра, результатом чего является многопрофильность потенциалов и перестройка энергетического спектра.

Полученные явные выражения для уровней энергии и волновых функций стационарных состояний в зависимости от параметров системы имеют вид простых формул, выраженных через элементарные функции (полиномы, радикалы, тригонометрические и обратные тригонометрические функции, экспоненциальные и гиперболические функции), и существенно дополняют результаты предшествующих работ.

Найденные точные решения уравнения Шредингера с простыми явными выражениями для потенциалов, уровней энергии и волновых функций стационарных состояний существенно обогатили множество точно решаемых моделей в квантовой механике, которое образует незабываемое ценное достояние квантовой теории, ее «золотой» фонд.

Выражаем признательность А.М.Ермолаеву и Ю.П.Степановскому за внимательное отношение и поддержку нашей работы.

1. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, *Квантовая механика*, Наука, Москва (1989).
2. Ю.В.Василевская, В.В.Ульянов, *Вестник ХГУ*, 417, сер. «Физика», в. 1, 9 (1998).
3. V.V.Ulyanov, O.B.Zaslavskii, *Phys. Rep.*, 216, 179 (1992).
4. В.П.Ильин, Ю.И.Кузнецов, *Трёхдиагональные матрицы и их приложения*, Наука, (Москва) 1985.

5. Г.Корн, Т.Корн, *Справочник по математике (для научных работников и инженеров)*, Наука, (Москва) 1977.
6. Ю.В.Василевская, В.В.Ульянов, *Вестник ХГУ*, **440**, сер. «Физика», в. 3, 7 (1999).
7. Ю.В.Василевская, В.В.Ульянов, *Вестник ХНУ*, **476**, сер. «Физика», в. 4, 37 (2000).
8. Ю.В.Василевская, В.В.Ульянов, *Новые квазиточнорешаемые модели в квантовой теории спиновых систем*, ХНУ им. В.Н.Каразина, Харьков, 2005.

New spin quasi-exactly solvable models

Yu.V.Vasilevskaja, V.V.Ulyanov

The new exact spin origin solutions of Schrödinger equation with simple explicit analytical expressions for potential fields, energy levels and wave functions of stationary states have been obtained. By using the methods of quantum theory of spin systems new exact solutions of one-dimensional stationary Schrödinger equation for a number of model of effective potentials are found. The formulae for energy spectrum and corresponding wave functions have been determined.

Новые спиновые квазиточнорешаемые модели. II

Ю.В.Василевская, В.В.Ульянов

Харьковский национальный университет им. В.Н.Каразина

Украина, 61077, г. Харьков, пл. Свободы, 4

E-mail: Vladimir.V.Ulyanov@univer.kharkov.ua

Получены новые точные решения уравнения Шредингера спинового происхождения, имеющие простые явные аналитические выражения для потенциальных полей, уровней энергии и волновых функций стационарных состояний. С помощью методов квантовой теории спиновых систем найдены новые точные решения одномерного стационарного уравнения Шредингера для ряда моделей эффективных потенциалов. Выведены формулы для энергетического спектра и соответствующих волновых функций.

Отримано нові точні розв'язки рівняння Шредингера спінового походження, що мають прості явні аналітичні вирази для потенціальних полів, рівнів енергії та хвильових функцій стаціонарних станів. За допомогою методів квантової теорії спінових систем знайдено нові точні розв'язки одновимірного стаціонарного рівняння Шредингера для деяких моделей ефективних потенціалів. Виведено формули для енергетичного спектра та відповідних хвильових функцій.

PACS: 03.65.-w

УДК 530.145

В предыдущей части работы [1] были получены уровни энергии для спиновых точных решений. Теперь мы приведем соответствующие результаты для волновых функций стационарных состояний (все обозначения соответствуют введенным в [1]; там же приведены ссылки на предшествующие работы).

Волновые функции для спиновых точных решений

Вначале рассмотрим волновые функции стационарных состояний для спиновых точных решений уравнения Шредингера, соответствующих легкоосному парамагнетизму, т. е. спиновой системе в поперечном магнитном поле с гамильтонианом $H = -S_z^2 - BS_x$.

В соответствии с обозначениями из обзора [2] волновые функции в координатном представлении можно записать в виде

$$\psi(x) = A \exp\left[-\frac{B}{2} \text{ch}(x)\right] \Phi(x), \quad (2.1)$$

$$\Phi(x) = \sum_{\sigma=-S}^S c'_\sigma \exp(\sigma x), \quad (2.2)$$

где коэффициенты c'_σ определяются системой уравнений

$$(E + \sigma^2) c'_\sigma + \frac{B}{2} [(S - \sigma + 1) c'_{\sigma-1} + (S + \sigma + 1) c'_{\sigma+1}] = 0, \quad (2.3)$$

$$c'_{S+1} = 0, c'_{-S-1} = 0.$$

Если уровни энергии E считать известными, то волновые функции строятся непосредственно на основе

рекуррентных соотношений (2.3) для любых значений спина S . При этом учет симметрии волновых функций в координатном представлении упрощает вычисления, поскольку для четных волновых функций $c'_{-\sigma} = c'_\sigma$, а для нечетных $c'_{-\sigma} = -c'_\sigma$, т. е. $\Phi(x)$ содержит либо гиперболические косинусы $\text{ch}(Sx), \text{ch}[(S-1)x], \dots$ (и константу в случае целых S) для четных волновых функций, либо гиперболические синусы $\text{ch}(Sx), \text{ch}[(S-1)x], \dots$ для нечетных.

В частности, при $\sigma = S$ из (2.3) сразу же вытекает, что коэффициент c'_{S-1} связан с c'_S универсальным соотношением

$$c'_{S-1} = -2 \frac{E + S^2}{B} c'_S, \quad (2.4)$$

а при $\sigma = S$ получаем с учетом (2.4), что

$$c'_{S-1} = -2 \frac{E + S^2}{B} c'_S. \quad (2.5)$$

Аналогично при $\sigma = S-2$ после некоторых преобразований имеем:

$$c'_{S-3} = \frac{2}{3B} \left[(3S-1)E + S(3S^2 - 5S + 4) - \frac{2(E + S^2)[E + (S-1)^2]}{B^2} \right] c'_S \quad (2.6)$$

Таким же способом получаем все коэффициенты при любых S . Учитывая, что c'_σ определены с точностью до множителя, включаемого в нормировочный коэффициент A , приходим к общей структуре волновых

функций стационарных состояний:

$$\psi_{0,2}(x) = A_{0,2} \exp\left[-\frac{B}{2} \operatorname{ch}(x)\right] \times \left[\operatorname{ch}(x) - \frac{E_{0,2} + 1}{B}\right], \quad (2.7)$$

$$\psi_{1,3}(x) = A \exp\left[-\frac{B}{2} \operatorname{ch}(x)\right] \times \left[\operatorname{sh}\left(\frac{3}{2}x\right) - 2\frac{E + 9/4}{B} \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}x\right)\right]. \quad (2.8)$$

При выписывании коэффициентов при гиперболических функциях следует учесть, лишь отношение c'_σ / c'_S , но для свободного члена, который будет при целых S в четных волновых функциях, нужно в выражении для c'_0 положить $c'_S = \frac{1}{2}$.

Переходя к конкретным примерам, ограничимся значениями спина $S = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, 5/2, 3, 7/2$ и 4, для которых имеются явные выражения для уровней энергии.

В случае $S = 0$ имеется один спиновый уровень энергии $E_0 = 0$, а соответствующая волновая функция основного состояния равна

$$\psi_0(x) = A_0 \exp\left[-\frac{B}{2} \operatorname{ch}(x)\right]. \quad (2.9)$$

Это выражение в соответствии с (2.1) фигурирует в качестве множителя во всех других формулах для волновых функций. Ему отвечает колоколообразный график, подобный «гауссиану» гармонического осциллятора.

Заметим, что нормировочные коэффициенты A выражаются через модифицированные функции Бесселя (функции Макдональда): так, $A_0 = K_0(1)^{-1/2}$. В дальнейших расчетах, однако, мы не будем приводить этих выражений, чтобы не загромождать главные результаты.

В случае $S = 1/2$ получаем следующие волновые функции:

$$\psi_1(x) = A_1 \exp\left[-\frac{B}{2} \operatorname{ch}(x)\right] \operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right),$$

$$\psi_0(x) = A_0 \exp\left[-\frac{B}{2} \operatorname{ch}(x)\right]. \quad (2.10)$$

Выпишем далее выражения для волновых функций в случае $S = 1$:

$$\psi_1(x) = A_1 \exp\left[-\frac{B}{2} \operatorname{ch}(x)\right] \operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right),$$

$$\psi_0(x) = A_0 \exp\left[-\frac{B}{2} \operatorname{ch}(x)\right] \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right). \quad (2.11)$$

вид

Аналогичные выражения для $S = 3/2$ имеют

$$\psi_{0,2}(x) = A_{0,2} \exp\left[-\frac{B}{2} \operatorname{ch}(x)\right] \times \left[\operatorname{ch}(x) - \frac{E_{0,2} + 1}{B}\right],$$

$$\psi_{1,3}(x) = A \exp\left[-\frac{B}{2} \operatorname{ch}(x)\right] \times \left[\operatorname{sh}\left(\frac{3}{2}x\right) - 2\frac{E + 9/4}{B} \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}x\right)\right]. \quad (2.12)$$

Здесь и далее индексы у нормировочных констант A и уровней энергии E не выписываем, чтобы не загромождать формулы.

В случае $S = 2$ волновые функции нечетных состояний равны

$$\psi_{1,3}(x) = A \exp\left[-\frac{B}{2} \operatorname{ch}(x)\right] \times \left[\operatorname{sh}\left(\frac{3}{2}x\right) - 2\frac{E + 9/4}{B} \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}x\right)\right], \quad (2.13)$$

$$\times \left[\operatorname{sh}\left(\frac{3}{2}x\right) - 2\frac{E + 9/4}{B} \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}x\right)\right]$$

а волновые функции четных состояний равны

$$\psi_{0,2}(x) = A \exp\left[-\frac{B}{2} \operatorname{ch}(x)\right] \times \left[\operatorname{ch}\left(\frac{3}{2}x\right) - 2\frac{E + 9/4}{B} \operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}x\right)\right]. \quad (2.14)$$

В случае $S = 5/2$ вычисления приводят к таким формулам для волновых функций нечетных состояний:

$$\psi_{1,3,5}(x) = A \exp\left[-\frac{B}{2} \operatorname{ch}(x)\right] \times \left\{ \operatorname{sh}\left(\frac{5}{2}x\right) - 2\frac{E + 25/4}{B} \operatorname{sh}\left(\frac{3}{2}x\right) + 2\left[\frac{(E + 25/4)(E + 9/4)}{B^2} - \frac{5}{4}\right] \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}x\right) \right\} \quad (2.15)$$

а для волновых функций четных состояний получаем:

$$\psi_{1,3,5}(x) = A \exp\left[-\frac{B}{2} \operatorname{ch}(x)\right] \times \left\{ \operatorname{sh}\left(\frac{5}{2}x\right) - 2\frac{E + 25/4}{B} \operatorname{sh}\left(\frac{3}{2}x\right) + 2\left[\frac{(E + 25/4)(E + 9/4)}{B^2} - \frac{5}{4}\right] \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}x\right) \right\} \quad (2.16)$$

В случае $S=3$ расчет дает для волновых функций нечетных состояний выражения

$$\begin{aligned} \psi_{1,3,5}(x) = A \exp\left[-\frac{B}{2} \operatorname{ch}(x)\right] \times \\ \times \left\{ \operatorname{sh}\left(\frac{5}{2}x\right) - 2 \frac{E+25/4}{B} \operatorname{sh}\left(\frac{3}{2}x\right) + \right. \\ \left. + 2 \left[\frac{(E+25/4)(E+9/4)}{B^2} - \frac{5}{4} \right] \operatorname{sh}\left(\frac{3}{2}x\right) \right\}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

тогда как для четных состояний имеем

$$\begin{aligned} \psi_{0,2,4}(x) = A \exp\left[-\frac{B}{2} \operatorname{ch}(x)\right] \times \\ \times \left\{ \operatorname{ch}\left(\frac{5}{2}x\right) - 2 \frac{E+25/4}{B} \operatorname{ch}\left(\frac{3}{2}x\right) + \right. \\ \left. + 2 \left[\frac{(E+25/4)(E+9/4)}{B^2} - \frac{5}{4} \right] \operatorname{ch}\left(\frac{3}{2}x\right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Наконец, в случаях $S=7/2$ и $S=4$ получаем аналогичные более громоздкие формулы, но здесь мы их не станем приводить.

На этом завершим расчеты волновых функций стационарных состояний для рассматриваемых точных решений уравнения Шредингера, соответствующих спиновой системе типа легкоосного парамагнетика в поперечном магнитном поле.

Вместе с приведенными в предыдущей части работы [1] соответствующими результатами для уровней энергии они дают полное решение поставленной задачи.

Далее получим волновые функции стационарных состояний, соответствующих легкоосному парамагнетику в наклонном магнитном поле, т. е. спиновой системе с гамильтонианом

$$H = -S_z^2 - B_x S_x - B_z S_z.$$

Выкладки аналогичны случаю поперечного магнитного поля, за исключением соображений симметрии, поскольку эффективный потенциал

$$U(x) = \frac{B_x^2}{4} \left[\operatorname{sh}(x) - \frac{B_z}{B_x} \right]^2 - B_x \left(S + \frac{1}{2} \right) \operatorname{ch}(x) \quad (2.19)$$

уже не является четной функцией. Так, волновая функция

$$\begin{aligned} \psi(x) = A \exp\left[-\frac{B_x}{2} \operatorname{ch}(x) + \frac{B_z}{2} x\right] \Phi(x), \\ \Phi(x) = \sum_{\sigma=-S}^S c'_\sigma \exp(\sigma x), \end{aligned} \quad (2.20)$$

где рекуррентные соотношения для

$$c'_{S+1} = 0, c'_{-S-1} = 0 \quad (2.21)$$

теперь должны использоваться в полной мере.

Для вычисления c'_σ достаточно заметить, что в формулах предыдущего случая нужно заменить на $E + \sigma B_z$, а B на B_x . Таким образом,

$$c'_{S-1} = -2 \frac{E+S^2}{B} c'_S, \quad (2.22)$$

$$c'_{S-1} = -2 \frac{E+S^2}{B} c'_S \quad (2.23)$$

и т. д., а волновые функции стационарных состояний строятся из соответствующих экспонент по общему для всех состояний правилу

$$\psi_{0,2}(x) = A_{0,2} \exp\left[-\frac{B}{2} \operatorname{ch}(x)\right] \left[\operatorname{ch}(x) - \frac{E_{0,2}+1}{B} \right]. \quad (2.24)$$

Переходя к конкретным примерам, также ограничимся только значениями спина $S=0, 1/2, 1$ и $3/2$, для которых можно найти явные выражения для уровней энергии.

В случае $S=0$ для $E=0$ волновая функция основного состояния равна

$$\psi(x) = A \exp\left[-\frac{B_x}{2} \operatorname{ch}(x) + \frac{B_z}{2} x\right] \Phi(x). \quad (2.25)$$

В случае $S=1/2$ получаем следующие волновые функции:

$$\begin{aligned} \psi_{0,1}(x) = A \exp\left[-\frac{B_x}{2} \operatorname{ch}(x) + \frac{B_z}{2} x\right] \times \\ \times \left\{ \exp\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{B_z \mp \sqrt{B_x^2 + B_z^2}}{B_x} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) \right\} \end{aligned} \quad (2.26)$$

с уровнями энергии

$$E_{0,1} = -\frac{1}{4} \mp \frac{1}{2} \sqrt{B_x^2 + B_z^2}. \quad (2.27)$$

Выпишем выражения для спина $S=1$:

$$\begin{aligned} \psi_0(x) = A \exp\left[-\frac{B_x}{2} \operatorname{ch}(x) + \frac{B_z}{2} x\right] \times \\ \times \left\{ \exp(x) - \left[1 - \frac{2}{B_x^2} (E+1+B_z) \right] \times \right. \\ \left. \times \exp(-x) - \frac{2}{B_x} (E+1+B_z) \right\} \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$E_m = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{1+3B^2} \times \\ \times \cos \left[\frac{1}{3} \arccos \frac{1+9/2B^2-9B^2}{(1+3B^2)^{3/2}} +, \quad (2.29) \right. \\ \left. + \frac{\pi}{3}(3m^2 - 7m + 2) \right]$$

где $m = 0, 1, 2$. В случае $S = 3/2$ получаем аналогичные выражения, которые для краткости опускаем.

Заметим, что, если знание уровней энергии достаточно для описания термодинамических свойств, то для задач кинетики необходимо знание также и волновых функций, не говоря уже о чисто квантовых задачах о движении частицы в стационарных и нестационарных состояниях.

Заключительные замечания

Полученные формулы проверялись как путем сравнения с частными случаями для

отдельных значений параметров, так и численными расчетами, а также аналитическими (символьными) преобразованиями с помощью современных компьютерных математических программ.

В отличие от большинства стандартных моделей потенциалов, рассмотренные спиновые эффективные потенциалы имеют волновые функции стационарных состояний очень простого вида, выражаясь через экспоненты или гиперболические функции.

Кроме найденных уровней энергии и волновых функций с точными выражениями в виде достаточно простых формул (относящихся к части энергетического спектра) имеется также бесконечное множество «надспиновых» состояний, для которых точные выражения отсутствуют (квазиточнорешаемость). Однако по отношению к квазичастице с эффективным потенциалом наиболее важно в квантовой статистике знание именно нижней части энергетического спектра, для которого как раз и имеются точные решения.

Рассматриваемые потенциальные модели обладают помимо точных решений указанного спинового типа также и другими решениями «внеспинового» типа при значениях параметра S , не являющихся целыми или полуцелыми числами.

Важность основного уровня энергии состоит в том, что это энергия наиболее стабильного состояния, в частности при сверхнизких температурах свойства системы определяются именно этим уровнем энергии, а близкие к нему уровни возбужденных состояний определяют физические свойства системы при низких температурах.

Как уже подчеркивалось в [1], используемое в работе спин-координатное соответствие «расширяет» спиновую систему, «оснащая» ее такими объектами, как непрерывное координатное пространство, а найденные точные решения уравнения Шредингера с простыми явными выражениями для потенциалов, уровней энергии и волновых функций стационарных состояний существенно обогатили множество точно решаемых моделей в квантовой механике, которое

образует незыблемое ценное достояние квантовой теории, ее «золотой» фонд.

Выражаем признательность А.М.Ермолаеву и Ю.П.Степановскому за внимательное отношение и поддержку нашей работы.

1. Ю.В.Василевская, В.В.Ульянов, *Вестник ХГУ*, 739, сер. «Физика», в. 9, 59 (2006).
2. V.V.Ulyanov, O.B.Zaslavskii, *Phys. Rep.*, 216, 179 (1992).

New spin quasi-exactly solvable models.II

Yu.V.Vasilevskaja, V.V.Ulyanov

The new exact spin origin solutions of Schrödinger equation with simple explicit analytical expressions for potential fields, energy levels and wave functions of stationary states have been obtained. By using the methods of quantum theory of spin systems new exact solutions of one-dimensional stationary Schrödinger equation for a number of model of effective potentials are found. The formulae for energy spectrum and corresponding wave functions have been determined.

Новые спиновые квазиточнорешаемые модели. III

Ю.В.Василевская, В.В.Ульянов

Харьковский национальный университет им. В.Н.Каразина

Украина, 61077, г. Харьков, пл. Свободы, 4

E-mail: Vladimir.V.Ulyanov@univer.kharkov.ua

Получены новые точные решения уравнения Шредингера спинового происхождения, имеющие простые явные аналитические выражения для потенциальных полей, уровней энергии и волновых функций стационарных состояний. С помощью методов квантовой теории спиновых систем найдены новые точные решения одномерного стационарного уравнения Шредингера для ряда моделей эффективных потенциалов. Выведены формулы для энергетического спектра и соответствующих волновых функций.

Отримано нові точні розв'язки рівняння Шредінгера спінового походження, що мають прості явні аналітичні вирази для потенціальних полів, рівнів енергії та хвильових функцій стаціонарних станів. За допомогою методів квантової теорії спінових систем знайдено нові точні розв'язки одновимірного стаціонарного рівняння Шредінгера для деяких моделей ефективних потенціалів. Виведено формули для енергетичного спектра та відповідних хвильових функцій.

PACS: 03.65.-w

УДК 530.145

В предыдущих частях нашей работы [1] были получены уровни энергии для спиновых точных решений и приведены соответствующие результаты для волновых функций стационарных состояний (все обозначения соответствуют введенным в [1]; там же приведены ссылки на предшествующие работы).

Завершающую часть цикла наших статей [1-3] мы посвящаем замеченной аналогии между спиновыми и солитонными точно- и квазиточнорешаемыми моделями и приводим итоговые замечания.

О спин-солитонной аналогии

Междуспиновыми и солитонными [2] моделями потенциальных полей имеется много общего. Так, спин-координатное соответствие в теории спиновых систем является аналогом так называемой «пары Лакса» теории солитонов, т. е. солитон-координатного соответствия. В обоих случаях имеется некоторое ассоциированное уравнение Шредингера, с помощью которого решаются главные задачи – проблема энергетического спектра в спиновых системах и задача Коши в теории солитонов для нелинейного эволюционного уравнения Кортевега-де Фриза. В спин-координатном соответствии связующую роль играет представление спиновых когерентных состояний, тогда как в солитон-координатном соответствии аналогичную роль играет

интегральное преобразование Гельфанда-Левитана-Марченко в методе обратной задачи рассеяния.

В обоих случаях исходные элементы – дискретные (спин и солитон), а им ставятся в соответствие непрерывные координатные представления с одномерными потенциальными полями и некоторым энергетическим соответствием. В спиновом случае имеем спиновый спектр и надспиновые уровни энергии для нелокализованных потенциалов, а в солитонном случае имеем у локализованных потенциалов дискретный солитонный спектр и непрерывный «надсолитонный» с полной прозрачностью.

Еще один общий аспект – целочисленная аналогия: в спиновом случае основным параметром потенциальных моделей является целое число $2S+1$, тогда как эквивалентным элементом в солитонном случае служит число солитонов N .

И в том, и в другом случае имеются потенциалы и волновые функции стационарных состояний построенные из экспоненциальных (или гиперболических) функций, а в периодических потенциалах и солитонного, и спинового типа есть выражения, содержащие эллиптические функции. У локализованных потенциалов солитонной природы

уровни энергии связанных состояний неизменны при деформациях потенциалов. У спиновых эффективных потенциалов также встречаются случаи, когда некоторые уровни энергии остаются фиксированными при изменении профилей потенциалов, что специально подчеркивалось в соответствующих местах статьи [1]. Типичная для солитонных периодических (и почти периодических) моделей конечноразрывность встречается и в спиновых моделях.

Общей спин-солитонной особенностью является четкое разбиение энергетического спектра на две части: в спиновых системах это выражается в квазиточноразрывности, а в солитонных — в безотражательности.

При этом можно считать, что соответствующее уравнение Шредингера описывает состояния некоторых псевдочастиц — «спинзона» в случае спиновых систем и «фризона» в случае солитонных систем.

Особенность спинзона — спиновой системе могут соответствовать как нелокализованные, так и периодические потенциалы. Особенность фризона — солитонной системе могут соответствовать как локализованные, так и периодические потенциалы.

Для спиновых моделей спинзон описывается эффективным уравнением Шредингера с потенциалом, найденным с помощью спин-координатного соответствия, уровни энергии частично совпадают со спектром спинового гамильтониана, волновые функции определяют спиновые векторы состояния. В случае солитонных моделей некая псевдочастица фризон описывается ассоциированным уравнением Шредингера с потенциалом, являющимся солитонным решением уравнения Кортевега-де Фриза, уровни энергии связаны со скоростью солитонов, а волновые функции определяют решения модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза.

Кроме того, в обоих случаях потенциальным моделям присущи разнообразие форм, наличие нескольких параметров, помимо отмеченных дискретных, появление аналогичных особых профилей потенциалов: с минимумом четвертого порядка, двухъямных с возможным попаданием уровней энергии в критический диапазон вблизи максимума разделяющего ямы барьера и т. п.

И в том, и в другом случае наряду с симметричными моделями существуют разнообразные несимметричные, а также периодические потенциалы. Как в спиновом, так и в солитонном случаях имеются «внеспиновые» и «внесолитонные» ситуации, образующиеся для спиновых моделей при нецелых значениях $2S+1$, а в солитонном случае для несолитонных профилей потенциалов.

Аналогия может проследиваться во многих аспектах, среди которых важное место занимает ввод в обиход новых понятий (квазиточноразрывность,

ассоциированное уравнение Шредингера, спин-координатное соответствие, безотражательность, конечноразрывность, псевдочастицы и пр.)

Далее, в обоих случаях открытие точных решений явилось побочным результатом основных исследований — разработки новых методов в теории спиновых и солитонных систем. Солитонный бум в значительной степени эксплуатировал квантовую теорию, но его достижения остались в основном в трудах по солитонике и не переплыли еще в монографии по квантовой механике и ее приложениям. Та же ситуация сложилась и в отношении проблемы квазиточноразрывных задач и новых подходов в теории спиновых систем, хотя здесь речь идет главным образом о связи между двумя разделами самой квантовой механики. В проблеме квазиточноразрывных задач все большую долю забирает себе матфизика и чистая математика, как было и в теории солитонов.

Таким образом, между двумя совершенно различными системами, поставляющими в квантовую теорию модели с точными решениями, имеется целый ряд соответствий. Видимо, еще предстоит выяснить вопрос о том, является ли это чисто внешней аналогией, или за этим скрыто глубокое структурное сходство.

В отличие от простых стандартных моделей потенциалов, у которых волновые функции стационарных состояний выражаются через специальные функции (кроме случаев дельта-потенциала и прямоугольной ямы), рассматриваемые солитонные потенциалы строятся из элементарных гиперболических функций, и волновые функции для них также состоят из гиперболических функций.

Еще одно отличие заключается в том, что стандартные модели являются однопрофильными и в лучшем случае однопараметрическими (не считая размерных коэффициентов), тогда как у солитонных потенциалов для каждого набора уровней энергии находится не один фиксированный профиль потенциала, а бесконечное многопараметрическое семейство потенциальных моделей.

Особое отличие от всех других моделей состоит в том, что можно задавать совершенно произвольно зависимость уровней энергии E_n

связанных состояний от номера состояний n , разумеется, с учетом того, что обычно энергия отсчитывается от предельных значений потенциала $U(\pm\infty)$, так что в

случае произвольного $E_n < 0$ энергетические параметры равны, и на их основе строятся как потенциалы (с включением дополнительных параметров: квазивремени t и фазовых добавок d_n) так и волновые функции стационарных состояний [2].

Таким образом, количество потенциалов с

простыми точными решениями в квантовой механике существенно обогащается многопараметрическими моделями разнообразного вида.

Итоговые замечания

Проблеме обнаружения новых точных решений уравнения Шредингера посвящено большое количество работ. Этот вопрос актуален со времени появления квантовой механики и по сей день, поскольку точно решаемые модели составляют основу квантовой механики, фонд, пригодный как для постановки и решения новых задач, так и имеющий самостоятельное значение.

В связи с этим найденные новые точные решения представляют несомненный интерес, так как удается записать в явном и достаточно простом аналитическом виде точные выражения как для уровней энергии, так и для волновых функций стационарных состояний.

В наших работах [1-2] найдены новые точные решения для потенциальных моделей, полученных с помощью метода спин-координатного соответствия, а также исследован многопараметрический класс моделей солитонного происхождения.

Резюмируем полученные результаты.

Найденные в работе дополнительные качественно новые точные решения уравнения Шредингера спинового происхождения содержат простые явные выражения для потенциалов, уровней энергии и волновых функций стационарных состояний, что существенно пополнило класс подобных решений. Специфика спиновых точных решений состоит прежде всего в разнообразии профилей потенциалов, а их отличительная особенность – физический смысл уже при своем появлении, поскольку они явились не плодом математических преобразований, а результатом исследования конкретных физических систем.

Одним из приложений полученных в работе результатов является изучение физических свойств анизотропных парамагнетиков в магнитных полях (энергетического спектра, намагниченности, восприимчивости). Другим приложением является новый метод расчета уровней энергии четверного осциллятора на основе найденных точных решений для эффективных потенциалов с минимумом 4-го порядка. Об этих приложениях и других связанных с ними результатах см. [3].

Связь стационарного уравнения Шредингера с нелинейным эволюционным уравнением Кортевега-де Фриза в теории солитонов приводит к появлению разнообразных локализованных моделей потенциальных полей, у которых имеются простые явные аналитические формулы для уровней энергии и волновых функций стационарных состояний в квантовой механике. Существенно, что в отличие

от других случаев с точными решениями в моделях солитонной природы задаются уровни энергии и каждому набору уровней соответствует бесконечное многопараметрическое семейство потенциальных моделей.

Проведенные в работе исследования позволили установить характерные формы таких многоуровневых потенциалов, вывести формулы для соответствующих волновых функций стационарных состояний и выявить фазовые добавки, определяющие несимметричные профили таких моделей.

Как показано в работе, между двумя совершенно различными системами – спиновой и солитонной, – поставляющими в квантовую теорию модели потенциальных полей с точными решениями, имеется целый ряд соответствий. В обоих случаях точные решения являются побочным результатом основных исследований – разработки новых методов в теории спиновых и солитонных систем. В обеих системах исходные элементы – дискретные (спин и солитон), а им отвечают ассоциированное уравнение Шредингера и непрерывное координатное представление с потенциалами и некоторым энергетическим сопоставлением. В каждой из этих систем потенциальным моделям присущи многопараметричность, разнообразие форм, экстремумы высокого порядка, симметричные и несимметричные профили. Квазиточнорешаемости спиновых моделей соответствует безотражательность солитонных.

В работе широко использовались компьютерные методы исследования, которые, в частности, позволяют контролировать аналитические расчеты как на основе аналитических же преобразований с помощью пакетов типа Mathematica, так и в численном и графическом виде. Точные решения являются основой теории стационарных состояний, фундаментом новых задач, базой приближенных методов, тестовыми примерами для компьютерных методов исследования. Они используются при изучении сложных явлений с неизвестными закономерностями и при проверке новых теорий, важны для методических целей при демонстрации квантовых эффектов.

Найденные точные решения уравнения Шредингера с простыми явными выражениями для потенциалов, уровней энергии и волновых функций стационарных состояний существенно обогатили множество точно решаемых моделей в квантовой механике, которое образует незыблемое ценное достояние квантовой теории, ее «золотой» фонд.

Выражаем признательность А.М.Ермолаеву и Ю.П.Степановскому за внимательное отношение и поддержку нашей работы на всех ее этапах.

1. Ю.В.Василевская, В.В.Ульянов, *Вестник ХНУ*, сер. «Физика», **783**, в. 10, 41 (2007); **739**, в. 9, 59 (2006).
2. Ю.В.Василевская, В.В.Ульянов, *Вестник ХГУ*, сер. «Физика», **417**, в. 1, 9 (1998).
3. Ю.В.Василевская, В.В.Ульянов, *Вестник ХНУ*, сер. «Физика», **440**, в. 3, 7 (1999); **476**, в. 4, 37 (2000); **516**, в. 5, 27 (2001); **558**, в. 6, 14 (2002).

NEW SPIN QUASI-EXACTLY SOLVABLE MODELS.III

Yu.V.Vasilevskaia, V.V.Ulyanov

The new exact spin origin solutions of Schrödinger equation with simple explicit analytical expressions for potential fields, energy levels and wave functions of stationary states have been obtained. By using the methods of quantum theory of spin systems new exact solutions of one-dimensional stationary Schrödinger equation for a number of model of effective potentials are found. The formulae for energy spectrum and corresponding wave functions have been determined.

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|--|----|
| Предисловие | 3 |
| Точно розв'язувані моделі потенціалів надпрозорового типу в квантовій механіці // УФЖ. - 1998. - Т. 43, № 3. - С. 363-367. - Соавт.: Василевская Ю.В. | 4 |
| Точные решения уравнения Шредингера в случае солитонобразных моделей потенциальных полей //Вестник ХНУ имени В.Н.Каразина, № 417, серия «Физика», вып. 1, 1998, с. 9-13. - Соавт.: Василевская Ю.В. | 10 |
| К теории квантовых ангармонических осцилляторов // Вестник ХНУ имени В.Н.Каразина, № 440, серия «Физика», вып. 3, 1999, с. 7-12. - Соавт.: Василевская Ю.В. | 15 |
| К теории квантовых ангармонических осцилляторов. II // Вестник ХНУ имени В.Н.Каразина, № 476, серия «Физика», вып. 4, 2000, с. 37-41. - Соавт.: Василевская Ю.В. | 21 |
| К теории квантовых ангармонических осцилляторов. III // Вестник ХНУ имени В.Н.Каразина, № 558, серия «Физика», вып. 6, 2002, с. 14-17. - Соавт.: Василевская Ю.В. | 26 |
| Осцилляции магнитной восприимчивости в спиновых системах // Вестник ХНУ имени В.Н.Каразина, № 516, серия «Физика», вып. 5, 2001, с. 27-29. - Соавт.: Василевская Ю.В. | 30 |
| Туннельное расщепление энергии в несимметричных случаях // Вестник ХНУ имени В.Н.Каразина, № 600, серия «Физика», вып. 7, 2003, с. 27-31. | 33 |
| Туннельное расщепление энергии в несимметричных случаях. II // Вестник ХНУ имени В.Н.Каразина, № 651, серия «Физика», вып. 8, 2005, с. 35-40. | 38 |
| Новые спиновые квазиточнорешаемые модели // Вестник ХНУ имени В.Н.Каразина, № 739, серия «Физика», вып. 9, 2006, с. 59-66. - Соавт.: Василевская Ю.В. | 44 |
| Новые спиновые квазиточнорешаемые модели. II//Вестник ХНУ имени В.Н.Каразина, № 783, серия «Физика», вып. 10, 2007, с. 41-44. - Соавт.: Василевская Ю.В. | 52 |
| Новые спиновые квазиточнорешаемые модели. III//Вестник ХНУ имени В.Н.Каразина, № 821, серия «Физика», вып. 11, 2008, с. 33-36. - Соавт.: Василевская Ю.В. | 56 |

Наукове видання

Володимир Володимирович Ульянов

ЗБІРКА ОГЛЯДІВ І СТАТЕЙ З КВАНТОВОЇ ТЕОРІЇ

(зі співавторами та без)

Частина четверта

Українською і російською мовами

Електронне видання

Відповідальний за випуск Г.І.Рашба

**Издания кафедры теоретической физики имени
академика И.М.Лифшица (вклад Ульяновых)**
К 200-летию Харьковского университета

Серия монографий и учебных пособий

1. В.В.Ульянов. ВСТУП ДО КВАНТОВОЇ КІНЕТИКИ. – 2004.
2. Ю.В.Василевская, В.В.Ульянов
НОВЫЕ КВАЗИТОЧНОРЕШАЕМЫЕ МОДЕЛИ В
КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ СПИНОВЫХ СИСТЕМ. – 2005.
3. Е.Н.Синельник, В.В.Ульянов
ФРАКТАЛЫ: ОТ МАТЕМАТИКИ К ФИЗИКЕ(+CD). – 2005.
4. А.В.Лымарь, В.В.Ульянов. ФРАКТАЛЫ: ОТ МАТЕМАТИКИ К
ФИЗИКЕ. Ч. 2 (+CD). – 2010.
5. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА НА ФИЗИЧЕСКОМ ФАКУЛЬТЕТЕ
ХАРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. Сост. В.В.Ульянов. – 2009.
6. В.В.Ульянов. О КВАЗИКЛАССИЧЕСКОМ ДВИЖЕНИИ
ЧАСТИЦ В ПОЛЯХ С ОСОБЕННОСТЯМИ. – 2002.
- 7,8. В.В.Ульянов, Н.В.Ульянов. КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВА-
НИЯ КВАНТОВЫХ ЯВЛЕНИЙ. Ч. 1, 2 (+CD). – 2011, 2012.
- 9,10,11,12. В.В.Ульянов. ВВОДНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО КВАНТОВОЙ
МЕХАНИКЕ. Ч. 1, 2, 3, 4. – 2002, 2011.
- 13,14. В.В.Ульянов. ЛЕКЦИИ ПО КВАНТОВОЙ СТАТИСТИКЕ.
Ч. 1, 2. – 2011.
- 15,16. В.В.Ульянов. ВВОДНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО КВАНТОВОЙ
МЕХАНИКЕ. Ч. 1, 2. Изд. 2-е, доп. – 2011.
17. В.В.Ульянов. К ИСТОРИИ ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА
И КАФЕДРЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. Ч. 1. – 2003.
18. В.В.Ульянов. К ИСТОРИИ ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА
И КАФЕДРЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. Ч. 2. – 2003.
19. А.М.Ермолаев, В.В.Ульянов
К ИСТОРИИ ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА
И КАФЕДРЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. Ч. 3. – 2004.
20. В.В.Ульянов. СБОРНИК ОБЗОРОВ И СТАТЕЙ ПО
КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ. Ч. 1. – 2011.
21. В.В.Ульянов. СБОРНИК ОБЗОРОВ И СТАТЕЙ ПО
КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ. Ч. 2. – 2012.
22. А.М.Ермолаев, Н.В.Ульянов. СПИНОВЫЕ ВОЛНЫ
В НЕФЕРРОМАГНИТНЫХ ПРОВОДНИКАХ
С ПРИМЕСНЫМИ СОСТОЯНИЯМИ ЭЛЕКТРОНОВ. – 2006.
23. А.М.Ermolaev, N.V.Ulyanov. ELECTRON SPIN WAVES IN
NONMAGNETIC CONDUCTORS WITH RESONANCE STATES
OF ELECTRONS. – 2008.
24. О.М.Єрмолаєв, В.В.Ульянов. СТИСЛИЙ НАРИС ІСТОРІЇ
КАФЕДРИ ТЕОРЕТИЧНОЇ ФІЗИКИ ІМЕНІ АКАДЕМІКА
І.М.ЛІФШИЦЯ. – 2008.

200-летию Харьковского университета

Серия воспоминаний об ученых-физиках

1. В.В.Ульянов
ИЛЬЯ МИХАЙЛОВИЧ ЛИФШИЦ. – 2001,2007(+DVD).
2. А.М.Ермолаев, В.В.Ульянов
МОИСЕЙ ИСААКОВИЧ КАГАНОВ. – 2001.
3. В.В.Ульянов. ЛЕВ ЭЛЕАЗАРОВИЧ ПАРГАМАНИК. – 2002.
4. В.Г.Песчанский, В.В.Ульянов
ЛЕОНИД СТЕПАНОВИЧ ГУЛИДА. – 2002.
5. В.В.Ульянов
БОРИС ИЕРЕМИЕВИЧ ВЕРКИН. – 2002.
6. А.М.Ермолаев, В.В.Ульянов
АРНОЛЬД МАРКОВИЧ КОСЕВИЧ. – 2002.
7. В.В.Ульянов
ВИКТОР МОИСЕЕВИЧ ЦУКЕРНИК. – 2002.
8. А.М.Ермолаев, В.В.Ульянов
ВАЛЕНТИН ГРИГОРЬЕВИЧ ПЕСЧАНСКИЙ. 2002.
9. А.М.Ермолаев, В.В.Ульянов
ЭМАНУИЛ АЙЗИКОВИЧ КАНЕР. – 2002.
10. А.М.Ермолаев, Ю.П.Степановский, В.В.Ульянов
АЛЕКСАНДР ИЛЬИЧ АХИЕЗЕР. – 2002.
11. В.В.Ульянов
АНДРЕЙ ВЛАДИМИРОВИЧ ЖЕЛЕХОВСКИЙ. – 2003.
12. В.Г.Песчанский, В.В.Ульянов
ВЛАДИМИР ПЕТРОВИЧ ГАЛАЙКО. – 2003.
13. А.М.Ермолаев, В.В.Ульянов
ИГОРЬ ИВАНОВИЧ ФАЛЬКО. – 2003.
14. Г.И.Рашба, В.В.Ульянов
АЛЕКСАНДР МИХАЙЛОВИЧ ЕРМОЛАЕВ. – 2003.
- 15.
16. А.М.Ермолаев, В.В.Ульянов
ОЛЕГ ИВАНОВИЧ ЛЮБИМОВ. – 2005.
17. В.В.Ульянов. ЛАНДАУ В ХАРЬКОВЕ. – 2008.
18. В.В.Ульянов. ВОСПОМИНАНИЯ ФИЗИКА-ТЕОРЕТИКА. Ч.1. – 2008.
19. В.В.Ульянов. К 95-ЛЕТИЮ Л.Э.ПАРГАМАНИКА. – 2009 (CD).
20. В.В.Ульянов. ЛАНДАУ В ХАРЬКОВЕ (2-е изд., доп.). – 2010.
21. А.М.Ермолаев, В.В.Ульянов. М.И.КАГАНОВ В ХГУ. – 2011.
22. В.В.Ульянов. К 90-ЛЕТИЮ М.И.Каганова. – 2011 (CD).

К 200-летию Харьковского университета

Серия воспоминаний о Детях физмата

1. В.В.Ульянов. АНАТОЛИЙ ИВАНОВИЧ ШАРАПОВ. – 2002, 2007.
2. В.В.Ульянов. НА УНИВЕРСИТЕТСКОЙ. – 2002, 2007.
3. В.В.Ульянов. АНАТОЛИЙ ГАВРИЛОВИЧ КЛАДКОВОЙ (Мой друг Толька). – 2002, 2007(CD).
4. ЛЕГЕНДЫ И БЫЛИ СТАРОГО ФИЗМАТА
 - Ч.I. Сборник рассказов. Агафонова Н.Ф., Дзюба А.С., Перваков В.А., Сизова З.И., Ульянов В.В., Шарапов А.И. - 2002.
 - Ч. I I. Сборник рассказов. Агафонова Н.Ф., Бляшенко Г.С., Гапон Э.В, Иванов И.Г., Кондратьев Б.В., Мерисов Б.А., Ульянов В.В., Хижковский В.П., Шарапов А.И. - 2002.
 - Ч. I I I. Сборник рассказов. Агафонова Н.Ф., Бляшенко Г.С., Козинец В.В., Кондратьев Б.В., Николаев Г.Т., Ульянов В.В., Шарапов А.И. - 2002.
 - Ч.IV. Сборник рассказов. Бляшенко Г.С., Гребенник И.П., Мерисов Б.А., Ульянов В.В., Чебанова Т.С. - 2002.
 - Ч.V. Сборник рассказов. Бляшенко Г.С., Валиев Б.М., Гребенник И.П., Мерисов Б.А., Сизова З.И., Ульянов В.В. - 2002.
 - Ч.VI. Сборник рассказов. Барьяхтар В.Г., Гребенник И.П., Креснин А.А., Манжелей В.Г., Пустовалов В.В., Рофе-Бекетов Ф.С., Ульянов В.В., Яцук К.П. - 2003.
 - Ч.VII. Сборник стихов. Николаев Г.Т., Рогинкина Н.А., Рофе-Бекетов Ф.С., Сизова З.И., Степановский Ю.П., Ульянов В.В., Шарапов А.И. - 2003.
 - Ч.VIII. Сборник рассказов. Гребенник И.П., Тартаковский В.К., Ульянов В.В., Яцук К.П. - 2003.
 - Ч.IX. Сборник рассказов. Бляшенко Г.С., Гребенник И.П., Пустовалов В.В., Ульянов В.В., Яцук К.П. - 2003..
 - Ч.X. Сборник рассказов. Гребенник И.П., Ульянов В.В., Хижковский В.П., Яцук К.П. - 2003.
 - Ч.XI. Сборник стихов. Бирюков В.Я., Кан Я.С., Николаев Г.Т., Рофе-Бекетов Ф.С., Ульянов В.В., Шарапов А.И., Яцук К.П., Яцук Л.П. - 2003.
 - Ч.XII. Сборник рассказов. Боярский Л.А., Гребенник И.П., Малеев В.Я., Пустовалов В.В., Ульянов В.В., Чебанова Т.С. - 2004.
 - Ч.XIII. Сборник рассказов. Ковинько Н.М., Мазель Е.З., Ривкина Э.М., Розенберг В.Я., Тартаковский В.К., Ульянов В.В., Шарапов А.И. - 2008.
 - Ч.XIV. Сборник стихов. Бирюков В.Я., Евланов М.В., Кан Я.С., Николаев Г.Т., Рогинкина Н.А., Рофе-Бекетов Ф.С., Сизова З.И., Степановский Ю.П., Таранова Г.М., Ульянов В.В., Шарапов А.И., Яцук К.П., Яцук Л.П. - 2009.
 - Ч.XV. Сборник рассказов. Креснин А.А., Ульянов В.В., Федченко Л.Ю., Хайтман Е.Н., Яровая Р.Г. - 2009.
 - Ч.XVI. Сборник рассказов. Рофе-Бекетов Ф.С., Татарченко Л.П., Ульянов В.В. – 2009.
5. В.В.Ульянов. КАК МЫ ПРАЗДНОВАЛИ 50-ЛЕТИЕ ОКОНЧАНИЯ УНИВЕРСИТЕТА (+CD). – 2007.

К 200-летию Харьковского университета

Серия воспоминаний о жизни в XX веке

1. В.В.Ульянов. Д О В О Й Н Ы (1934-1941). – 2002.
2. В.В.Ульянов. В О Е Н Н Ы Е Г О Д Ы (1941-1945). – 2002.
3. В.В.Ульянов. В Ш К О Л Е (1945-1952). – 2002.
4. В.В.Ульянов
РАССКАЗЫ О ЛЕТНЕМ ОТДЫХЕ (1934-1950). – 2003.
5. В.В.Ульянов
РАССКАЗЫ О ЛЕТНЕМ ОТДЫХЕ (1951-1954). – 2003.
6. В.В.Ульянов, И.П.Ульянова
РАССКАЗЫ О ЛЕТНЕМ ОТДЫХЕ (1955-1957). – 2003.
7. В.В.Ульянов, И.П.Ульянова
РАССКАЗЫ О ЛЕТНЕМ ОТДЫХЕ (1958-1961). – 2003.
8. В.В.Ульянов. Д В А Д Н Я В А Л У Ш Т Е. – 2003.
(Волейбольные грёзы)
9. В.В.Ульянов. Д В А Д Ц А Т Ы Й Д О М. – 2003.
10. В.В.Ульянов. 5 0 Л Е Т С П У С Т Я. – 2003.
11. В.А.Ульянов
ВОСПОМИНАНИЯ ДЕТСТВА И ЮНОСТИ. – 2003.
12. В.А.Ульянов. МОЯ ПОЕЗДКА В США И ОБРАТНО. – 2003.
13. В.А.Ульянов. С Т Р А Н И Ч К И Ж И З Н И. – 2003.
14. В.В.Ульянов
РОДОСЛОВНАЯ НАШЕЙ СЕМЬИ. – 2004.
15. В.В.Ульянов. ПОЛВЕКА В УНИВЕРСИТЕТЕ. – 2004.
16. В.В.Ульянов, И.П.Ульянова
РАССКАЗЫ О ЛЕТНЕМ ОТДЫХЕ (1962-1967)+CD. – 2006.
17. В.В.Ульянов. ПОЛВЕКА В УНИВЕРСИТЕТЕ(2-е изд., доп.). – 2007.
18. В.В.Ульянов. ВИКТОР ЕВГЕНЬЕВИЧ РУБАНИЧ(+CD). – 2008.
19. В.В.Ульянов. НОВОЕ О ПУШКИНЕ И ГОГОЛЕ. – 2009 (CD).
20. В.В.Ульянов. ИЗДАНИЯ. ВЫСТАВКА КНИГ. – 2009 (CD).
21. Н.В. и И.П.Ульяновы. ЧЕРНОГОРИЯ. ИЮЛЬ 2009. – 2009 (CD).
22. Н.В.Ульянов, И.П.Ульянова. ПО ЮГУ ЕВРОПЫ. – 2009 (CD).
23. В.В.Ульянов. К 150-ЛЕТИЮ А.П.ЧЕХОВА. – 2010 (CD).
24. В.В.Ульянов. К 170-ЛЕТИЮ П.И.ЧАЙКОВСКОГО. – 2010 (CD).
25. Н.В. и И.П.Ульяновы. БОЛГАРИЯ И РУМЫНИЯ. – 2010 (CD).
26. В.В. и Н.В.Ульяновы. МИСХОР – АВГУСТ 2010. – 2010 (CD).
27. В.В.Ульянов. К 110-летию В.А.Ульянова. Рисунки отца. – 2011 (CD).
28. В.В.Ульянов. АНАТОЛИЙ ПАВЛОВИЧ ЗАВАЛИШИН. – 2011 (CD).
29. В.В.Ульянов
МОЯ МУЗЫКАЛЬНАЯ ИСТОРИЯ (+DVD). – 2011.
30. В.В.Ульянов, И.П.Ульянова
РАССКАЗЫ О ЛЕТНЕМ ОТДЫХЕ (1968-1973)+DVD. – 2011.

PHYSICS REPORTS

A Review Section of Physics Letters

NEW METHODS IN THE THEORY OF QUANTUM SPIN SYSTEMS

V. N. KRAVCHUK AND G. A. KRAVCHUK

Volume 274 Number 1 July 1992

ISSN 0370-1571 (1992)

ISSN 0370-1571 (1992)

Available online

THEORETICAL AND MATHEMATICAL PHYSICS

Теоретическая и математическая физика

ТОМ 148 № 1 ЯНВАРЬ 2006



УКРАЇНСЬКИЙ ФІЗИЧНИЙ ЖУРНАЛ

2010
Том 58
Випуск 1

UKRAINIAN JOURNAL OF PHYSICS



Published by Academic Press

THE PHYSICAL REVIEW

Том 124, Выпуск 3

September 2003

ЖУРНАЛ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ТОМ 130
2011



ИЗДАТЕЛЬСТВО
МАК "НАУКА/ИНТЕРПЕРИОДИКА"

ФИЗИКА НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР

ТОМ 9

5 - 100

Физика низких температур

Специальный выпуск,
посвященный памяти И. М. Лифшица

Под редакцией В. А. Фокина

Том 23
Выпуск 1
1997

МИНИСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Вісник Харківського Національного Університету імені В. Н. Каразіна

№ 9

Харків 2

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

ФИЗИКА

ОТДЕЛЬНАЯ ОТПРАВКА

2-75

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ХАРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

PHYSICAL REVIEW B

CONDENSED MATTER AND MATERIALS PHYSICS

Volume 138, Number 1
January 2009

ISSN 1098-7763
(2009) 138:1

Journal of Experimental and Theoretical Physics

English Translation of
Zhurnal Eksperimental'noi i Teoreticheskoi Fiziki

Editor-in-Chief
Alexander I. Larkin



PLEIADES PUBLISHING

ISSN 1067-4136

Distributed by Springer

LOW TEMPERATURE PHYSICS

Translated from Russian. English Publication

It is a pleasure to be joined by the Russian Academy of Sciences
to the International Physics of Low Temperatures
Volume 138, Number 1, January 2009

Volume 122 Number 1 January 2008

Russian Physics Journal

ISSN 1067-4136
CODEN RPHJ
CODINGEN RPHJ

